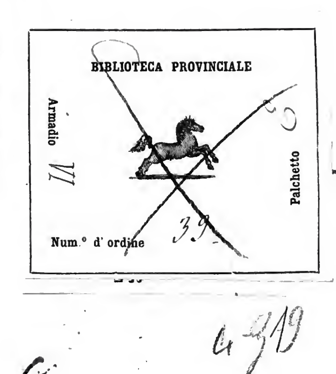
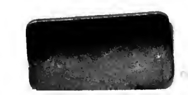



FONDO PIZZOFALCONE


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
VI
Palchetto
Num.° d'ordine
39



TRAITÉ

DK

MÉCANIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE,

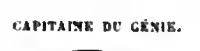
A L'USAGE

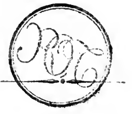
DES ÉLÈVES DES ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

ET DES ASPIRANTS A CES ÉCOLES;

PAR C. GAUBERT,

CAPITAINE DU GÉNIE.







PARIS.

CARILIAN-GŒURY ET V^{VE} DALMONT, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, nos 39 et 41.

1841.

A Monseigneur

le Duc d'Orléans,

PRINCE ROYAL.

Monseigneur,

Ancien élève de l'Ecole polytechnique, sur les bancs de laquelle vous êtes venu vous asseoir, et membre de la grande famille militaire dont vous faites aujourd'hui partie et dont vous serez un jour le chef, je suis venu à ce double titre vous prier d'agréer l'hommage de mon **Traité de mécanique** *: vous avez daigné l'accepter, et cette haute marque de bienveillante approbation a pu seule m'enhardir*

à inscrire mon nom, obscur dans les sciences, au-dessous de ceux de tant d'hommes distingués qui ont écrit sur cette matière, et dont la série vient de se terminer si dignement par le grand nom de Poisson.

Daignez donc, Monseigneur, agréer ici la nouvelle expression de ma vive reconnaissance et de mon respectueux dévouement.

Le capitaine du Génie

C. GAUBERT.

PRÉFACE.

Le grand mouvement progressif du siècle a puisé le plus souvent sa force d'impulsion dans la science mécanique, et si, dans ces derniers temps, on a peu écrit sur la mécanique rationnelle, il en a été autrement de la mécanique appliquée, qui a trouvé de nombreux et savants propagateurs.

Loin de nous cependant la pensée de vouloir amoindrir l'œuvre de Poisson, ce livre si complet et si remarquable de clarté où il a versé à pleines mains les trésors de la science et de ses propres découvertes. Mais nous pensons que cette production éminente a dépassé, sans l'atteindre, le but que nous nous proposons et par son prix et par son étendue. En un mot, nous avons cru qu'il manquait un Traité de Mécanique complet et succinct, conforme au programme et à l'enseigne-

ment des Écoles polytechnique et normale. Le lecteur jugera si nous avons rempli la lacune que nous venons de signaler.

Nous avons été assez heureux pour suivre les leçons de M. Cauchy, qui, jeune encore, avait agrandi le domaine de l'analyse et était déjà l'analyste le plus ingénieux comme le calculateur le plus habile de l'époque. Nous avons fait tous nos efforts pour suivre le maître pas à pas et briller un peu de sa lumière, appelant de tous nos vœux son œuvre pour faire disparaître la nôtre. Heureux si en attendant nous avons été de quelque secours à la jeunesse studieuse !

Nous devons ajouter que nous avons consulté avec fruit les leçons de Navier, auxquelles nous avons emprunté le chapitre relatif au calcul de l'effet des machines.



TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE.

INTRODUCTION.

1. On appelle *matière* tout ce qui est susceptible d'affecter nos sens d'une manière quelconque.

Les *corps* sont des portions de matière limitées en tous sens et qui ont une *forme* et un *volume* déterminés.

On nomme *masse* la quantité de matière renfermée sous un volume donné.

Si l'on conçoit que les dimensions d'un corps décroissent simultanément et indéfiniment, la limite de ce décroissement sera un *point matériel* : en ne faisant décroître ainsi que deux dimensions ou une seule, on arrive à une *ligne matérielle* ou à une *surface matérielle*.

Ces points, lignes ou surfaces, diffèrent de ceux définis en géométrie, mais ils se déterminent de même ; ainsi un point matériel sera déterminé en général au moyen de ses trois coordonnées parallèles aux intersections de trois plans rectangu-

laires, ou bien au moyen de ses coordonnées polaires.

2. On appelle *force* une cause quelconque de mouvement, soit qu'elle mette le corps en mouvement ou qu'elle tende seulement à le produire, son effet étant détruit par une autre cause. L'intensité d'une force se mesure par la pression qu'elle exerce sur un plan perpendiculaire à sa direction.

On considère trois choses dans une force, savoir : son point d'application, son intensité et sa direction, ou l'espace qu'elle tend à faire parcourir à son point d'application.

3. Un corps sollicité par plusieurs forces peut rester en repos, car on conçoit que ces forces peuvent se modifier, se contrarier et même se détruire complétement; dans ce dernier cas le corps ne prend aucun mouvement. Cet état s'appelle *équilibre*, et on dit que ces forces sont *en équilibre*.

La *mécanique* a pour objet la recherche des conditions d'*équilibre* et de *mouvement*. La première partie se rapporte à la *statique*, et la deuxième à la *dynamique*. Toutes les fois que les corps que l'on considère ne sont point solides, la première prend le nom d'*hydrostatique* et la deuxième celui d'*hydrodynamique*.

4. Les forces se mesurent en prenant pour *unité* une force de convention; alors les forces peuvent être représentées par des nombres.

Deux forces sont *égales*, lorsqu'étant appliquées

en sens contraire à un même point ou aux deux extrémités d'une droite invariable, elles se font équilibre. Par suite une force est *multiple* d'une autre lorsqu'elle est formée par la réunion de plusieurs forces égales à la première et agissant dans la même direction.

D'après cela on est convenu de représenter les forces par des droites prises sur leurs directions.

5. Lorsque plusieurs forces P, P', P'', etc., agissent sur un point et qu'elles produisent des pressions P, P', P'', etc., la pression totale $P+P'+P''+$, etc., peut être considérée comme produite par l'application simultanée des forces P, P', P'', etc. ou par l'application immédiate d'une seule force égale à $P+P'+P''+$, etc.

On appelle *résultante* de plusieurs forces une force capable de produire le même effet que les premières, et celles-ci prennent le nom de *composantes*.

PREMIÈRE PARTIE.

STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES QUI CONCOURENT A UN MÊME POINT. COMPOSITION DES MOMENTS.

§ Ier.

Composition des forces concourantes.

6. Si toutes les forces ou *composantes*, agissent suivant la même droite et dans le même sens, la pression exercée pouvant provenir d'une seule force égale à la somme des forces appliquées, ou de l'application simultanée de ces forces, il en résulte que la *résultante* de pareilles forces *est égale à leur somme*.

Si deux forces Q et $P = Q + R$ agissent suivant la même droite, mais en sens contraire, la *résultante* sera évidemment la force R agissant suivant la même droite et dans la direction de la force P, d'où sans difficulté l'on déduit que, lorsque plusieurs forces agissent suivant la même direction et en sens contraire, *la résultante est égale à la différence de la somme des*

forces qui agissent dans un sens, et de la somme de celles qui agissent dans l'autre, et que de plus la résultante *agit dans le sens de la plus grande de ces deux forces finales*.

7. Il est évident que la résultante de deux forces qui concourent est comprise dans le plan de ces deux forces, et même dans leur angle, et que, dans le cas où ces deux forces sont égales, elle est de plus dirigée suivant la droite qui divise cet angle en deux parties égales, car il n'y a pas de raison pour qu'il en soit autrement.

8. Considérons d'abord deux forces P et Q agissant au point A, suivant des directions rectangulaires.

Fig. 1. Il est évident que la résultante R est fonction des deux forces données, en sorte que l'on a $R = f(P, Q)$; cette égalité ayant lieu, quelle que soit l'unité de force, on a aussi :

$$\alpha R = f(\alpha P, \alpha Q),$$

ou, en posant : $\alpha = \frac{1}{R}$:

$$1 = f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right),$$

ce qui montre que l'un des rapports du deuxième membre se déduit immédiatement de l'autre. Il est aisé de voir qu'en faisant varier le rapport $\frac{P}{Q}$ depuis l'infini jusqu'à zéro, l'angle θ varie depuis zéro jusqu'à l'infini, et d'une manière continue, lorsque le premier rapport varie lui-même d'une manière continue c'est-à-dire que la résultante R prend toutes les positions possibles dans l'angle C A B des deux composantes,

et réciproquement, quelle que soit la force R, on peut toujours trouver deux forces agissant, suivant les côtés de cet angle, qui lui soient équivalentes; par un raisonnement analogue, on voit qu'on peut poser

$$\frac{P}{R} = \varphi(\theta); \quad \frac{Q}{R} = \chi(\theta):$$

si on décompose la force R en deux autres suivant les lignes AE et AF rectangulaires, la ligne AE divisant l'angle θ en deux parties quelconques, on aura :

$$AE = R\varphi(u), \quad AF = \chi(u),$$

décomposant de même la force A E en deux autres P', Q' agissant suivant les droites rectangulaires A B, A C, on en déduira

$$P' = R\varphi(u)\varphi(v), \quad Q' = R\varphi(u)\chi(v);$$

décomposant ensuite AF en deux autres P'', Q'', suivant A B' et A C, on aura

$$P'' = R\chi(u)\chi(v) \quad Q'' = R\chi(u)\varphi(v).$$

Il vient de là :

$$Q' + Q'' = R\{\varphi(u)\chi(v) + \chi(u)\varphi(v)\}$$
$$P' - P'' = R\{\varphi(u)\varphi(v) - \chi(u)\chi(v)\}$$

mais on a aussi

$$Q' + Q'' = Q = R\chi(\theta) = R\chi(u+v)$$
$$P' - P'' = P = R\varphi(\theta) = R\varphi(u+v)$$

et par suite

$$\varphi(u+v) = \varphi(u)\varphi(v) - \chi(u)\chi(v),$$
$$\chi(u+v) = \chi(u)\varphi(v) + \varphi(u)\chi(v):$$

multipliant cette dernière égalité par $\sqrt{1}$ et ajoutant, il vient :

$$\varphi(u+v)+\sqrt{-1}\,\chi(u+v)=$$
$$=\{\varphi(u)+\sqrt{-1}\,\chi u+\}\,\{\varphi(v)+\sqrt{-1}\,\chi(v)\}.$$

La différentielle du premier membre étant la même par rapport à u et v, on peut égaler les dérivées du deuxième membre, ce qui donne

$$\{\varphi'(u)+\sqrt{-1}\,\chi'(u)\}\,\{\varphi(v)\sqrt{-1}\,\chi(v)\}=$$
$$\{\varphi(u)+\sqrt{-1}\,\chi(u)\}\,\{\varphi'(v)+\sqrt{-1}\,\chi'(v)\}$$

d'où

$$\frac{\varphi'(u)+\sqrt{-1}\,\chi'(u)}{\varphi(u)+\sqrt{-1}\,\chi(u)}=\frac{\varphi'(v)+\sqrt{-1}\,\chi'(v)}{\varphi(v)+\sqrt{-1}\,\chi(v)}:$$

le deuxième membre restant le même lorsqu'on fait varier u, on en conclut évidemment

$$\frac{\varphi'(u)+\sqrt{-1}\,\chi'(u)}{\varphi(u)+\sqrt{-1}\,\chi(u)}=\text{C}=\text{constante}$$

ou

$$\frac{d\{\varphi(u)+\sqrt{-1}\,\chi(u)\}}{\varphi(u)+\sqrt{-1}\,\chi(u)}=\text{C}\,du,$$

ou bien encore (1),

$$d.l\{\varphi(u)+\sqrt{-1}\,\chi(u)\}=\text{C}\,du$$

(1) La lettre d indique la différentielle, et la lettre l signifie logarithme.

ou en intégrant

$$l.\left\{\varphi(u)+\sqrt{-1}\,\chi(u)\right\}=Cu+C';$$

or, si nous posons $u=0$,

alors $\varphi(u)=1 \quad \chi(u)=0$

et l'égalité précédente se réduit à $l(1)=C'$, d'où $C'=0$; au contraire la supposition $u=\frac{\pi}{2}$ donne :

$$l\left\{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{-1}\,\chi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}=C\,.\,\frac{\pi}{2}=l\,.\sqrt{-1}=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$$

car

$$l.(a+b\sqrt{-1})=\tfrac{1}{2}l(a^2+b^2)+\left(\text{arc. tang.}\,\frac{b}{a}\right)\sqrt{-1},$$

expression qui, pour $a=0$ et $b=1$, se réduit à $\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$.

Ainsi $C=\sqrt{-1}$, et on a donc définitivement

$$l\left\{\varphi(u)+\sqrt{-1}\,\chi(u)\right\}=u\sqrt{-1}$$

et

$$\varphi(u)+\sqrt{-1}\,\chi(u)=e^{u\sqrt{-1}}=\cos.u+\sin.\sqrt{-1},$$

donc

$$\varphi(u)=\frac{P}{R}=\cos.u \qquad \chi(u)=\frac{Q}{R}=\sin.u,$$

ou bien $P=R\cos.u$, $Q=R\sin.u$ et $R^2=P^2+Q^2$. Donc *la résultante de deux forces, agissant suivant des droites rectangulaires, est représentée en gran-*

deur et en direction par la diagonale du rectangle construit sur les deux composantes.

9. La propriété que nous venons de démontrer étant le théorème fondamental, nous allons en donner une autre démonstration très-rigoureuse et indépendante du calcul différentiel.

Fig. 2. Soient deux forces quelconques, agissant au point A et représentées en grandeur et en direction par les longueurs AB, AC, la résultante sera dirigée suivant une droite dans l'angle BAC : soit pour le moment AD sa grandeur et sa direction. On voit évidemment que les deux forces 2P, 2Q, donnent la résultante 2R, nP, nQ...... nR; de même, $\frac{P}{n}, \frac{Q}{n}$ donnent $\frac{R}{n}$ en grandeur et en direction; car si cette direction n'était pas AD, les deux forces $\frac{nP}{n}, \frac{nQ}{n}$ ou P et Q, devraient avoir leur résultante dirigée suivant AD, ce qui n'aurait pas lieu : ainsi, $\frac{P}{n}, \frac{Q}{n}$ donnent $\frac{R}{n}$, donc $\frac{mP}{n}, \frac{mQ}{n}$ donnent $\frac{mR}{n}$, m et n étant des nombres entiers quelconques. On peut donc supposer que m et n varient, de manière que leur rapport converge vers une quantité quelconque, rationnelle ou irrationnelle. Or, ce sera encore vrai à la limite; donc, pour $\frac{m}{n} = x$ quelconque, entier, fractionnaire, rationnel ou irrationnel, on a toujours Px, Qx..... Rx, si P et Q donnent pour résultante R (x n'a pas de signe, puisque P et Q n'en ont pas). Si l'on veut une valeur de x, pour laquelle Rx = P, il

faut que $x = \frac{P}{R}$; ainsi les deux composantes, autour de Rx ou de P, seront $\frac{P^2}{R}$ et $\frac{PQ}{R}$: si l'on voulait au contraire que la résultante fût égale à Q, les deux composantes seraient $\frac{Q^2}{R}$ et $\frac{PQ}{R}$.

Cela posé, il est facile de démontrer que la résultante de deux forces rectangulaires est égale en grandeur à la diagonale du rectangle construit sur les composantes.

Soient P et Q les deux forces données, soit AD la direction de la résultante, et posant CAD $=\gamma$ et BAD $=\beta$: nous venons de voir que si la résultante devient égale à P, les composantes sont $\frac{P^2}{R}$ et $\frac{PQ}{R}$, dirigées suivant les mêmes droites AB et AC, ou formant les mêmes angles avec la résultante, et si la résultante devient égale à Q, les composantes auront les mêmes directions, et seront $\frac{PQ}{R}$ et $\frac{Q^2}{R}$: donc si la direction AE donne BAE $=\gamma$, la force P pourra être remplacée par $\frac{P^2}{R}$ et $\frac{PQ}{R}$ portées sur AD et AE (ce qu'on voit en renversant le système BACD); de même, si FAC $=\beta$, la force Q pourra être remplacée par $\frac{PQ}{R}$ et $\frac{Q^2}{R}$, portées sur AF et AD : ainsi les deux forces P et Q peuvent être remplacées par $\frac{P^2+Q^2}{R}$, $\frac{PQ}{R}$ et $\frac{PQ}{R}$, agissant suivant AD, AF, AF; or, dans le cas qui Fig. 3.

nous occupe, $\beta+\gamma=1^d$, d'où $2\beta+2\gamma=2_d$, et les deux forces $\frac{PQ}{R}$, dirigées suivant AE et AF se détruisent, et l'effet des deux forces rectangulaires P et Q est équivalent à celui de la force $\frac{P^2+Q^2}{R}$ agissant suivant AD : donc on a $R=\frac{P^2+Q^2}{R}$, ou

$$R^2=P^2+Q^2, \qquad R=\sqrt{P^2+Q^2},$$

et le radical n'est autre chose que la diagonale du rectangle construit sur les composantes ; donc, etc.

Il ne reste plus qu'à démontrer que la résultante est dirigée suivant cette diagonale.

Fig. 4. Cela est vrai pour deux forces égales, puisque, dans ce cas, la résultante divise en deux parties égales l'angle des deux composantes. Cela est vrai également dans le cas où les carrés des forces sont entre eux comme $1:2$ ou $1:3 \ldots\ldots 1:n$. En effet, soit d'abord P et $P\sqrt{2}$ les deux forces; nous avons prouvé que, dans tous les cas, $R=\sqrt{P^2+Q^2}$; donc ici $R=P\sqrt{3}$: il faut faire voir que cette résultante est dirigée suivant la diagonale du rectangle construit sur P et $P\sqrt{2}$. Or, tirons trois axes rectangulaires AX, AY, AZ, prenons sur chacune de ces trois lignes une longueur qui représente la force P, par exemple, AB, AC et AE. La composition des forces AC et AB donne la résultante AD en grandeur et en direction; il faut composer AD avec AE pour avoir la résultante définitive; donc elle part du point A, et est dirigée dans le plan EAD. On voit de même qu'en combi-

nant d'abord AE et AC, la résultante doit être dans le plan GAB, c'est-à-dire GABF; ainsi, elle doit être dirigée suivant l'intersection des deux plans EAD, GABF, qui est évidemment la diagonale AF du cube; or, $AD = P\sqrt{2}$, $AE = P$ et leur résultante est AF, qui est la diagonale du rectangle ADFE; donc, quand les carrés des forces sont dans le rapport de 1 à 2, le théorème est vrai. On le démontrerait de même quand les carrés des forces sont dans les rapports 1 : 3 ou 1 : 4. . . . . . 1 : n, en prenant simplement

$$AB=P,\ AC=P \text{ et } AE=P\sqrt{2} \text{ ou } AE=P\sqrt{3} \text{ ou}$$
$$AE=P\sqrt{4}\ldots\ldots AE=P\sqrt{n-1}.$$

Nous allons le démontrer maintenant, quel que soit le rapport des carrés des forces : soit $\frac{m}{n}$ ce rapport, m et n étant quelconques et $P\sqrt{m}$, $P\sqrt{n}$ les deux forces données, prenons sur les trois axes rectangulaires des longueurs égales à P, $P\sqrt{n-1}$, $P\sqrt{m}$; d'après ce qui précède, la combinaison de AC et AE donne la résultante AG, et la résultante finale est comprise dans le plan GAB; de même la combinaison de AB et AE donne la résultante AH, et la résultante finale est comprise dans le plan CAH; donc la résultante est dirigée suivant AF intersection des deux plans GAB, CAH. Or, AF est la diagonale du rectangle ABFG, construit sur la force $P\sqrt{m}$, et la résultante des deux forces P et $P\sqrt{n-1}$, qui équivaut à $P\sqrt{n}$; donc AF est la diagonale du rectangle construit sur les deux forces données. Donc Fig. 5.

la résultante de deux forces quelconques rectangulaires est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du rectangle construit sur les composantes.

Fig. 6. Considérons enfin deux forces quelconques P, Q agissant au point A, et représentées par AB et AC, en sorte que ABCD est le parallélogramme des forces. Abaissons sur la diagonale AD les perpendiculaires BH et CK, et après avoir mené par le point A la ligne EF perpendiculaire à AD, tirons par les points C et B des parallèles à AD; la force P se décompose en deux autres AM, et AK, de même la force Q se compose dans les deux autres, AN et AH. Les deux forces AM et AN sont égales, et agissent en sens contraire; ainsi elles se détruisent, et les deux forces restantes se réduisent en une seule égale à leur somme, et dirigée suivant AD. Ainsi, d'abord, la résultante est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme des forces; de plus, cette résultante est égale à AK plus AH ou KD; ainsi, elle est égale en grandeur à AK + KD ou à AD, c'est-à-dire à la diagonale. Donc *la résultante de deux forces quelconques concourantes est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme des forces.*

Fig. 7. R étant la résultante des deux forces P et Q, et ABCD le parallélogramme des forces, on a dans le triangle ABC,

$$ABC - \cos. ABC = -\cos. BAD = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2AB \times BC} =$$

$$= \frac{P^2 + Q^2 - R^2}{2PQ}$$

d'où l'on tire :

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos.(P,Q),$$

équation qui donne la grandeur de la résultante en fonction des composantes et de leur angle, et qui, dans le cas où cet angle est droit, se réduit à $R^2 = P^2 + Q^2$, résultat connu.

10. Il est évident que la résultante et les deux composantes sont représentées par les trois côtés de l'un des triangles BAD, CAD : ainsi toutes les questions que l'on peut se proposer, sur la composition de deux forces en une seule, et sur la décomposition d'une force en deux autres, sont ramenées à la résolution d'un triangle. Or, le problème contient six données ; savoir : les trois forces et les trois angles compris entre leurs directions ; ainsi, trois de ces six choses étant données, on pourra toujours trouver facilement les autres.

Si trois forces sont en équilibre autour d'un point, l'une quelconque d'elles doit être égale et directement opposée à la résultante des deux autres, d'où l'on conclut, que *lorsque trois forces sont en équilibre autour d'un point, chacune d'elles peut être représentée par le sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres.*

On voit ainsi, sans aucune difficulté, que les deux composantes sont entre elles comme les perpendiculaires abaissées sur leurs directions d'un point quelconque de leur résultante, et que, réciproquement, lorsque cette proportion a lieu, le point d'où partent les deux perpendiculaires appartient à leur résultante.

11. Ce qui précède donne le moyen d'obtenir la ré-

sultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point. En effet, si par l'extrémité de la première on mène une ligne égale et parallèle à la suivante, la ligne qui joindra son extrémité au point d'application sera la résultante de ces deux forces ; d'ailleurs, pour avoir la résultante cherchée, il faut prendre la résultante de deux des forces, la combiner avec une troisième, et ainsi de suite ; donc, si dans l'espace on forme un polygone, ayant pour côtés des droites égales et parallèles aux forces données, le dernier côté, ou la droite qui le fermera, c'est-à-dire qui joindra le point d'application à l'extrémité du dernier côté, représentera la résultante en grandeur et en direction. Quand le polygone se fermera de lui-même, la résultante sera nulle, ou les forces seront en équilibre.

Il résulte de là que, dans le cas du système de trois forces non situées dans le même plan, la résultante est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède construit sur les trois composantes, ce que nous avons eu déjà occasion de signaler. Du reste, la démonstration directe n'offre aucune difficulté.

§ II.

Propriétés des projections des forces et de leurs moments.

Fig. 8. 12. On appelle *projection d'une force* sur un plan ou sur un axe, une force représentée en grandeur et en direction par la projection de la ligne qui représente la force donnée. Ainsi, la projection d'une

force $P = AB$, agissant de A en B, est une force $\mu = ab$, et agissant aussi de a en b.

Imaginons par un point un système de forces situées ou non dans le même plan, et projetons ces diverses forces sur un même plan. Si nous construisons la résultante des forces données et celle de leurs projections, nous formerons deux polygones dont les derniers côtés seront les deux résultantes en question, et le deuxième sera la projection du premier, évidemment d'où résulte le théorème suivant : *La résultante des projections de plusieurs forces sur un plan est la projection de la résultante de ces forces.*

La construction de la résultante de plusieurs forces étant la même dans le cas où ces forces agissent suivant une même droite, le théorème précédent subsiste lorsqu'on projette les forces sur un axe.

13. Comme nous l'avons observé, une force est déterminée de direction lorsque l'on connaît les angles qu'elle fait avec les trois demi-axes de coordonnées positives. Cela posé, soient P, P', P'', etc., les forces d'un système, et R leur résultante : soient de plus α, β, γ les angles de la première avec les axes, α', β', γ' ceux de la deuxième, etc., et a, b, c ceux de la résultante. Projetons ces forces et leur résultante sur trois axes de coordonnées rectangulaires; la projection de la résultante sur l'axe des x sera $R \cos. a$, et les projections des composantes sur le même axe, seront représentées par $P \cos. \alpha$, $P' \cos. \alpha'$, etc. Or, la projection de la résultante est la résultante des projections; on a donc :

$$(A)\; R \cos. a = P \cos. \alpha + P' \cos. \alpha' + P'' \cos. \alpha'' + \ldots + \text{etc.},$$

on établirait de même les deux égalités :

$$R\cos.b = P\cos.\beta + P'\cos.'\beta + P''\cos.\beta'' + \ldots\ldots + \text{etc.}$$
$$R\cos.c = P\cos\gamma + P'\cos.\gamma' + P''\cos.\gamma'' + \ldots. + \text{etc.}$$

Les projections ainsi exprimées prennent le nom *de projections algébriques*, et présentent cet avantage, qu'elles emportent avec elles le signe de la force, à cause des cosinus qui y entrent. Ainsi, les égalités précédentes subsistent dans tous les cas. En les élevant au carré et les ajoutant, il vient :

$$R^2(\cos.^2 a + \cos.^2 b + \cos.^2 c) = R^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 + \ldots.. + \text{etc.} +$$
$$+ 2PP'(\cos.\alpha\cos.\alpha' + \cos.\beta\cos.\beta' + \cos.\gamma\cos.\gamma' + \ldots. + \text{etc.})$$
$$+ 2PP'(\cos.\alpha\cos.\alpha'' + \cos.\beta\cos.\beta'' + \ldots. + \text{etc.}) + \ldots. + \text{etc.} =$$
$$= P^2 + P'^2 + P''^2 + \ldots.. + \text{etc.} + 2PP'\cos.(P, P') + \text{etc.}$$
$$+ 2PP''\cos.(P, P'') + \ldots \text{etc.}$$

expression de la résultante en fonction des composantes et de leurs angles deux à deux. Dans le cas de trois forces rectangulaires, cette équation se réduit à $R^2 = P^2 + P''^2 + P'''^2$, valeur de la diagonale du parallélipipède, et lorsque le système se réduit à deux forces quelconques, on retombe sur la valeur

$$R^2 = P^2 + P'^2 + 2PP'\cos.(P, P').$$

Fig. 9. 14. Une force étant représentée par la droite AB, si d'un point arbitraire o on abaisse sur cette droite une perpendiculaire oH, le produit AB $\times$ oH sera ce qu'on appelle le *moment* de la force AB, le point o est le *centre des moments* et oAB le *plan des moments*. D'après cela *le moment d'une force est le double de la surface du triangle formé, en joignant le centre des moments aux deux extrémités de la*

force, et par conséquent on peut encore le mesurer par le produit du rayon oA, par la perpendiculaire Bm sur oA, ou bien par la projection de AB, sur la perpendiculaire à oA, menée par le point A.

Maintenant, projetons le triangle oAB sur un plan en $o'ab$; le moment de la force ab étant le double de la surface du triangle $o'ab$, et ce dernier étant la projection de oAB, il en résulte que le *moment de la projection d'une force est la projection du moment de cette force.*

Supposons que le point o se confonde avec l'origine des coordonnées, on aura Fig. 10.

$$\overline{oA}^2 = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

(xyz étant les coordonnées du point A), les cosinus du rayon avec les axes seront $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$: appelons, λ, μ, ν, les angles de la perpendiculaire au plan des moments avec les axes α, β, γ, ceux de la force AB; λ, μ, ν seront déterminés par les trois équations

$$\cos.\alpha \cos.\lambda + \cos.\beta \cos.\mu + \cos.\gamma \cos.\nu = 0,$$

$$\frac{x}{r}\cos.\lambda + \frac{y}{r}\cos.\mu + \frac{z}{r}\cos.\nu = 0,$$

$$\cos.^2\lambda + \cos.^2\mu + \cos.^2\nu = 1.$$

En combinant ces trois équations l'on obtient :

$$\frac{\cos.\lambda}{y\cos.\gamma - z\cos.\beta} = \frac{\cos.\mu}{z\cos.\alpha - x\cos.\gamma} = \frac{\cos.\nu}{x\cos.\beta - y\cos.\alpha}$$

$$= \sqrt{x^2+y^2+z^2 - (x\cos.\alpha + y\cos.\beta + z\cos.\gamma)^2}$$

observons que :

$$\frac{x}{r}\cos.\alpha + \frac{y}{r}\cos.\beta + \frac{z}{r}\cos.\gamma = \cos.BAD = \cos.0AB'.$$

et en multipliant par r les deux membres, il vient :

$$x\cos.\alpha+y\cos.\beta+z\cos.\gamma=r\cos.0\,AB'=AB'.$$

ainsi le radical est égal à

$$r^2-\overline{AB'}^2=\overline{0A}^2-\overline{AB'}^2=\overline{0B'}^2=p^2$$

et on a

$$\frac{\cos.\lambda}{y\cos.\gamma-z\cos.\beta}=\frac{\cos.\mu}{z\cos.\alpha-x\cos.\gamma}=\frac{\cos.\nu}{x\cos.\beta-y\cos.\alpha}=\frac{1}{p}:$$

Si l'on suppose le point o fixe et le rayon vecteur rigide et inextensible, la force P imprimera au plan des moments un mouvement *direct* ou *rétrograde* autour du point o. Le mouvement est direct ou rétrograde, suivant qu'il s'effectue de droite à gauche ou de gauche à droite pour un spectateur placé au-dessus du plan ; or, dans la dernière équation, les signes des cosinus dépendent des dénominateurs qui dépendent eux-mêmes de la nature du mouvement ; mais le mouvement a lieu en sens inverse pour un spectateur placé aux antipodes du premier, ou bien au-dessous du plan contre le prolongement de la perpendiculaire. D'après cela, si on effectue ce prolongement, le mouvement sera toujours direct, les cosinus seront complétement déterminés, et on aura les trois équations (B)

$$p\cos.\lambda=y\cos.\gamma-z\cos.\beta,$$
$$p\cos.\mu=z\cos.\alpha-x\cos.\gamma,$$
$$p\cos.\nu=x\cos.\beta-y\cos.\alpha.$$

Pour obtenir les deuxièmes membres de ces équations, on écrit les fractions $\frac{x}{\cos.\alpha}$, $\frac{y}{\cos.\beta}$, $\frac{z}{\cos.\gamma}$ dans l'ordre du mouvement direct, puis pour avoir, par exemple,

cos. λ, qui est le cosinus de l'angle avec l'axe des x, on réduit les facteurs en y et en z au même dénominateur et on prend la différence des numérateurs.

15. Considérons deux forces P, Q situées dans le même plan et agissant sur le point A. Soit o le centre des moments situé dans le plan des forces et de leur résultante R. Posons $oA=\rho$, $CA=Q$, $AB=P$, $AD=R$: construisons le parallélogramme des forces ABDC, et sur la ligne AM perpendiculaire au rayon vecteur oA projetons la résultante et les composantes : si les deux forces P, Q agissent dans le même sens, c'est-à-dire si elles tendent à faire tourner oA dans le même sens, on aura : Fig. 11.

$$AD'=AB'+AC'=AB'+B'D',$$

ou

$$R'=P'+Q',$$

d'où

$$\rho R'=\rho P'+\rho Q',$$

et comme nous avons démontré, n° **13**, que le moment d'une force peut se mesurer par le produit du rayon vecteur, et de la projection de cette force sur une ligne perpendiculaire à ce rayon vecteur, et passant par le point d'application, cette égalité signifie que *le moment de la résultante est égal à la somme des moments des composantes, ou bien que* $Rr=Pp+Qq$.

Si les forces P et Q agissaient en sens contraire, ce qui aura lieu lorsqu'elles tendront à faire tourner oA en sens contraire, on trouvera de même, à la simple inspection de la figure, $R'=P'-Q'$, (P' étant $>Q'$) ou

$$\rho R'=\rho P'-\rho Q',$$

ou bien encore

$$Rr = Pp - Qq:$$

ainsi, dans ce cas, le *moment de la résultante est égal à la différence des moments des composants*, et en général *le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes*, chacun de ces moments ayant le signe qui lui convient.

16. Si plusieurs forces sont appliquées à un même point et situées dans un même plan avec le centre des moments qu'on prend arbitrairement, on déterminera d'abord la résultante de toutes celles qui tendent à faire tourner le rayon vecteur dans un même sens, puis le moment de cette résultante; on en fera de même pour es forces qui tendent à faire tourner le rayon vecteur en sens contraire, alors le système des forces données sera réduit à deux forces situées dans un même plan avec le centre des moments, et qui sont entièrement déterminées, ainsi que leurs moments. On en conclura la résultante définitive et son moment, qui sera égal à la somme algébrique des moments des deux résultantes partielles.

Fig. 12. 17. Nous allons maintenant examiner le cas où on aurait plusieurs forces non situées dans le même plan avec le centre des moments.

Soient d'abord deux forces P, Q non situées dans le même plan avec le centre des moments. Il y a deux plans distincts de moments : si par le centre des moments on élève une perpendiculaire à l'un d'eux, et si sur la partie de cette ligne, convenable pour que le moment soit direct, on porte une longueur exprimée par un nombre qui mesure le moment absolu de la

force correspondante, on construira ce qu'on appelle *le moment linéaire de la force*. Par le centre o des moments élevons des droites oE, oF, oG perpendiculaires sur les plans oAB, oAC, oAD, qui ne sont autre chose que les plans des moments des deux forces et de leur résultante R, et sur ces droites prenons des longueurs proportionnelles aux moments Pp, Qq, Rr, nous aurons ainsi les moments linéaires des trois forces. Ces trois moments linéaires sont dans un même plan, puisque les trois droites qui les représentent sont perpendiculairement à la même ligne oA. Voyons maintenant quel est le rapport qui existe entre les moments linéaires de la résultante et des composantes.

Si les deux forces étaient dans le même plan avec le centre des moments, on aurait, d'après ce qui précède, $Rr = Pp + Qq$; or, les moments linéaires sont proportionnels aux moments absolus ; ainsi dans ce cas le moment linéaire de la résultante est égal à la somme des moments linéaires des composantes.

Les forces n'étant pas dans le même plan que le centre des moments, appelons R', P', Q' les projections des forces sur des perpendiculaires au rayon vecteur situées dans les plans des moments correspondants, et posons :

$$P' = AC' \quad Q' = AB' \quad R' = AD' ;$$

on a toujours :

$$\rho P' = Pp, \quad \rho Q' = Qq, \quad \rho R = Rr \, (1).$$

Le quadrilatère AC'B'D', étant la projection du parallélogramme ABCD sur un plan perpendiculaire au

rayon vecteur, est aussi un parallélogramme. D'après les équations (1) les moments linéaires oE, oF, oG sont proportionnels aux deux côtés et à la diagonale de ce nouveau parallélogramme : de plus, ces lignes forment deux à deux les mêmes angles ; car, par exemple, l'angle $C'AD'$ mesure l'angle des deux plans oAC, oAD, qui est aussi mesuré par FoG. Ainsi les angles $C'AD'$, FoG sont égaux ou suppléments, et il est facile de voir qu'ils sont toujours égaux, en effet ; supposons un moment que les deux forces correspondantes sont dans un même plan avec le centre des moments, il n'y a plus pour ces deux forces qu'un seul plan des moments, et les deux angles $C'AD'$, FoG sont nuls en même temps. Si on conçoit que le plan de l'une des forces se sépare de celui de l'autre et tourne d'une certaine quantité, les deux axes sur lesquels se comptent les moments linéaires, se sépareront aussi, et l'angle qu'ils comprendront sera égal à celui des deux plans ; mais en même temps, les axes sur lesquels se comptent les projections des forces se seront séparés pour faire un angle égal à celui des deux plans, et par suite à celui des moments linéaires. D'après cela les quadrilatères $AB'C'D'$, $FoEG$ sont composés de triangles semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, et par suite sont eux-mêmes semblables : ainsi le quadrilatère $oEGF$ est aussi un parallélogramme, et *il y a un parallélogramme de moments linéaires, comme il y a un parallélogramme des forces* : donc enfin *le moment linéaire de la résultante s'obtiendra au moyen des moments linéaires des composantes, comme la résultante s'obtient au moyen des composantes*, et l'on peut appli-

quer aux *projections des moments linéaires* tout ce que nous avons dit des *projections des forces.*

18. D'après ce qui précède, si Pp, $P'p'$ $P''p''$.... etc. sont les moments linéaires des forces, P, P' P'', ... etc. λ, μ, ν, λ', μ', ν' λ'', μ'', ν''.... etc. sont les angles que ces moments linéaires font avec les trois axes, Rr le moment résultant et l, m, n ses angles avec les axes, on aura :

$$Rr \cos. l = Pp \cos. \lambda + P'p' \cos. \lambda' + \ldots\ldots$$
$$Rr \cos. m = Pp \cos. \mu + P'p' \cos. \mu' + \ldots\ldots$$
$$Rr \cos. n = Pp \cos. \nu + P'p' \cos. \nu' + \ldots\ldots$$

d'où en élevant un carré et ajoutant,

$$R^2r^2 = P^2p^2 + P'^2p'^2 + \ldots + (2PP'pp' \cos. (Pp, P'p') + \ldots + \text{etc}$$

équation qui donne *la grandeur du moment linéaire de la résultante en fonction des moments linéaires des composantes et de leurs angles.*

19. Nous avons vu que la projection sur un plan du moment d'une force n'est autre chose que le moment de la force projetée pris par rapport à la projection du centre des moments. Supposons qu'on prenne le plan xy pour plan des projections et qu'on construise le moment linéaire de la force P, cette ligne fera, avec le demi-axe des z positifs, un angle aigu ou obtus que nous appellerons γ : l'angle du plan des moments avec le plan xy sera égal à γ ou à son supplément; ainsi la valeur absolue de la projection du triangle oAB sera donnée par $Pp \cos. \gamma$ (ce produit est pris positivement); et ce produit sera le moment de la force projetée, pris par rapport à la projection du centre des moments. Fig. 13.

Admettons maintenant qu'on prenne l'origine pour centre des moments, le moment $2\,o\,B'A'$ de la force projetée pris par rapport au même centre des moments sera $\pm Pp\cos.\gamma$, si on prend le cosinus avec son signe; cela posé, faisons mouvoir le rayon vecteur partant de point o autour de ce point dans les trois plans de projection, ce mouvement ira de ox en oy, puis de oy en oz, et de oz en ox, ou inversement. Dans le premier cas le mouvement s'effectue de droite à gauche, et est *direct*. Dans le deuxième il a lieu de gauche à droite, et est *rétrograde*. Il faut ajouter que, comme nous l'avons dit plus haut, le mouvement est direct ou rétrograde dans un plan donné, suivant qu'il se fait de droite à gauche ou inversement pour un spectateur à cheval sur un axe perpendiculaire au plan donné, et ayant les yeux tournés vers ce plan. Or, nous avons vu que le moment linéaire doit toujours être compté sur la perpendiculaire au plan des moments du côté où ce plan tend à se mouvoir de droite à gauche. Ainsi, lorsque le plan des moments coïncide avec l'un des plans de projection, avec celui de zx par exemple, et le centre des moments avec l'origine, si le mouvement est direct, le moment linéaire sera compté sur les y positifs, et s'il est rétrograde, sur les y négatifs. L'angle γ, c'est-à-dire l'angle du moment linéaire de la force P avec les z positifs, peut être aigu ou obtus; s'il est aigu, le moment linéaire sera dirigé au-dessus du plan de xy, et il aura été pris de manière que le spectateur qui serait appuyé sur cette ligne, voie le mouvement s'effectuer de droite à gauche; par conséquent, par rapport au même spectateur, la force projetée tendra à faire tourner le plan des xy dans le même

sens; donc son moment linéaire sera dirigé suivant les z positifs. Ainsi, le produit $Pp\cos.\gamma$ sera positif, et le mouvement de la force projetée sera direct; si γ est obtus, ce produit sera négatif; mais alors le mouvement du rayon vecteur de la force projetée serait rétrograde, comme on le voit sur la figure; donc le produit $Pp\cos.\gamma$ sera positif ou négatif, suivant que le mouvement de la force projetée sera direct ou rétrograde, et par suite suivant que le moment devra être compté sur les z positifs ou négatifs. On raisonnerait de même pour les deux autres plans de projection.

Considérons de nouveau une force P appliquée en un point A de l'espace, et décomposons-la en trois autres parallèles aux trois axes des coordonnées, et appelons α, β, γ les angles de cette force avec ces axes, les composantes seront $P\cos.\alpha$, $P\cos.\beta$, $P\cos.\gamma$; projetons la force P et ses composantes sur le plan zx; deux d'entre elles se projetteront en toute grandeur, et la troisième en un point et aura une projection nulle. En désignant par λ, μ, ν les angles du moment de la force avec les axes, le moment Pp de la force pris par rapport au point o centre des moments, aura pour projection algébrique sur zx, $Pp\cos.\mu$; ainsi le moment de la force A′ P′ est la résultante des deux forces A′C, A′B, qui équivalent à $\pm P\cos.\gamma$, $\pm P\cos.\alpha$, en prenant les cosinus avec leur signe; et elle est située avec elles et le centre des moments dans un plan; donc le moment de la résultante est égal à la somme des moments des composantes; ainsi x, z étant les coordonnées du point A′, on aura Fig. 14.

$$Pp\cos.\mu = \pm Px\cos\gamma \pm Pz\cos.\alpha.$$

Il s'agit de déterminer convenablement les signes. Considérons d'abord le produit P$x$cos.γ ; si Pcos.γ et x sont de même signe, la force A' C tend à donner au rayon o A un mouvement de droite à gauche, par conséquent le moment doit être positif (car nous donnons des signes contraires aux moments des forces projetées qui tendent à imprimer des mouvements en sens contraires) ; donc il est égal à P$x$cos.γ pris avec son signe. Si x et Pcos.γ sont de signes contraires, on voit sur la figure que le mouvement sera de gauche à droite, donc le moment sera négatif, et sera bien représenté par P$x$cos.γ avec son signe. Il est facile de voir sur la figure que si P cos. α et z sont de même signe, le moment doit être positif, tandis qu'il est négatif s'ils sont des signes contraires ; donc, dans tous les cas, il est égal à P z cos. α pris en signe contraire ; donc, et en raisonnant de même pour chaque plan de projection, on a les trois équations (1)

$$
\begin{aligned}
Pp\cos.\mu &= P(x\cos.\gamma - z\cos.\alpha)\\
Pp\cos.\lambda &= P(z\cos.\beta - y\cos.\gamma)\\
Pp\cos.\nu &= P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta)
\end{aligned}
$$

Si maintenant on prend la partie positive de l'axe de x pour la partie négative et réciproquement, on voit que, par rapport à cette nouvelle disposition, tous les mouvements ont changé ; donc si on prend toujours avec le signe + les moments des forces projetées, qui tendent à imprimer au rayon recteur oA un mouvement direct, on aura les équations (2)

$$
\begin{aligned}
Pp\cos.\mu &= P(z\cos.\alpha - x\cos.\gamma)\\
Pp\cos.\lambda &= P(y\cos.\gamma - z\cos.\beta)\\
Pp\cos.\nu &= P(x\cos.\beta - y\cos.\alpha).
\end{aligned}
$$

Cela posé, soit R, une résultante d'un système de forces P, P', P'' appliquées en un même point, en faisant usage des notations adoptées, nous aurons :

$$
\begin{aligned}
Rr\cos.\, l &= R(y\cos.\, c - z\cos.\, b)\\
Rr\cos.\, m &= R(z\cos.\, a - x\cos.\, c)\\
Rr\cos.\, n &= R(x\cos.\, b - y\cos.\, a)
\end{aligned}
$$

et de plus,

$$
\begin{aligned}
Pp\cos.\, \lambda &= P(y\cos.\, \gamma - z\cos.\, \beta)\\
P'p'\cos\, \lambda' &= P'(y\cos.\, \gamma' - z\cos.\, \beta')\\
P''p''\cos.\, \lambda'' &= P''(y\cos.\, \gamma'' - z\cos.\, \beta'').
\end{aligned}
$$

et des équations semblables pour les autres projections. Or, nous savons que dans un pareil système la projection du moment linéaire de la résultante sur un axe est égale à la somme des projections des moments des composants, on aura donc :

$$
\begin{aligned}
Rr\cos.\, l &= Pp\cos.\, \lambda - P'p'\cos.\, \lambda' + \ldots\ldots\\
Rr\cos.\, m &= Pp\cos.\, \mu + P'p'\cos.\, \mu' + \ldots\ldots\\
Rr\cos.\, n &= Pp\cos.\, \nu + P'p'\cos.\, \nu' + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

ou bien :

$$
\begin{aligned}
R(y\cos.\, c - z\cos.\, b) &= P(y\cos.\, \gamma - z\cos.\, \beta) + P'(y\cos.\, \gamma' - \cos.\, \beta') + \ldots\ldots\\
R(z\cos.\, a - x\cos.\, c) &= P(z\cos.\, \beta - y\cos.\, \gamma) + P'(x\cos.\, \beta' - y\cos.\, \gamma) + \ldots\ldots\\
R(x\cos.\, b - y\cos.\, a) &= P(x\cos.\, \beta - y\cos.\, \alpha) + P'(x\cos.\, \beta' - y\cos.\, \alpha') + \ldots
\end{aligned}
$$

Si on développe ces équations, on retombe sur des identités ; ainsi se trouvent vérifiées les équations précédentes, qui sont une nouvelle expression des projections du moment linéaire d'une force sur les axes des coordonnées.

§ III.

Équilibre d'un point matériel.

20. Le point étant sollicité par des forces P, P', P'' etc., conservons les mêmes notations que précédemment, et appelons X, Y, Z les projections de la résultante sur les axes des coordonnées, nous aurons évidemment les trois équations :

$$P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha' + \ldots\ldots + \text{etc.} = X,$$
$$P\cos.\beta + P'\cos.\beta' + \ldots\ldots + \text{etc.} = Y,$$
$$P\cos.\gamma + P'\cos.\gamma' + \ldots\ldots + \text{etc.} = Z,$$

et les trois suivantes :

$$X = R\cos.a, \quad Y = R\cos.b, \quad Z = R\cos.c:$$

la résultante est entièrement déterminée de grandeur et de position, car on tire des égalités précédentes :

$$\cos.a = \frac{X}{R} \quad \cos.b = \frac{Y}{R} \quad \cos.c = \frac{Z}{R}$$

et

$$R^2(\cos.^2 a + \cos.^2 b + \cos.^2 c) = X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2,$$

où

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + X^2}:$$

pour que le point reste en équilibre, il suffit que la résultante soit nulle, condition qui emporte les trois équations :

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = o,$$

ou bien :

$$P\cos.\alpha+P'\cos.\alpha'+\ldots\ldots+\text{etc}=o,$$
$$P\cos.\beta+P'\cos.\beta'+\ldots\ldots+\text{etc.}=o,$$
$$P\cos.\gamma+P'\cos.\gamma'+\ldots\ldots+\text{etc.}=o.$$

telles sont les conditions d'équilibre.

21. Si le point auquel sont appliquées les forces est situé sur une surface $u=f(x,y,z)=o$ il n'est plus nécessaire que la résultante soit nulle ; il faut et il suffit qu'elle soit normale à la surface, ou bien qu'elle coïncide en direction avec la normale, or, les angles de la normale avec les axes, sont :

$$\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2}},$$

$$\frac{du}{dy}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2}},$$

$$\frac{dx}{du}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2}}$$

et les angles de la résultante devant être les mêmes que ceux de la normale, les conditions d'équilibre seront :

$$\frac{\cos.a}{\frac{du}{dx}}=\frac{\cos.b}{\frac{du}{dy}}=\frac{\cos.c}{\frac{du}{dz}}$$

ou :

$$\frac{X}{\frac{du}{dx}}=\frac{Y}{\frac{du}{dy}}=\frac{Z}{\frac{du}{dz}}:$$

ainsi dans ce cas, il n'y a plus que deux conditions d'équilibre.

Fig. 15. Considérons par exemple, une droite OA rigide et inextensible; si nous supposons le point O fixe, les forces appliquées au point A imprimeront un mouvement de rotation à la droite autour du point O, et le point A décrira évidemment une sphère d'un rayon OA, soient x_0, y_0, z_0, les coordonnées du point fixe, et x, y, z, celles du point A, l'équation de la sphère sera :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=oA^2=r^2$$

on en déduit :

$$\frac{du}{dx}=2(x-xo),\ \frac{du}{dy}=2\,(y-y_0)\ \frac{du}{dz}=2(z-z_0),$$

et les équations d'équilibre deviennent :

$$\frac{x}{x-x_0}=\frac{y}{y-y_0}=\frac{z}{z-z_0}$$

ou bien :

$$\frac{\cos a}{x-x_0}=\frac{\cos b}{y-y_0}=\frac{\cos c}{z-z_0}=\pm\frac{R}{r}$$

puisque X,Y,Z, sont proportionnels aux cosinus des angles de la résultante. Ces équations prouvent en effet que la résultante coïncide avec la normale.

Si la surface n'était pas capable d'une résistance indéfinie, il faudrait en outre que la résultante ne surpassât pas cette résistance.

Si le point ne faisait que poser que sur la surface, il serait nécessaire que la résultante des forces pressât



le point contre la surface : ainsi dans le cas de la sphère, si le point posait sur la surface extérieure, la résultante devrait agir en sens contraire de la normale, et par suite les cosinus de ses angles seraient égaux et de signes contraires à ceux de la normale ou du rayon, et les équations :

$$\frac{X}{x-x_0}=\frac{Y}{y-y_0}=\frac{Z}{z-z_0}=\pm\frac{R}{r}$$

se réduiraient à :

$$\frac{X}{x-x_0}=\frac{Y}{y-y_0}=\frac{Z}{z-z_0}=-\frac{R}{r}.$$

dans le cas où le point reposerait intérieurement sur la surface de la sphère, le deuxième membre serait évidemment $+\frac{R}{r}$.

Enfin, dans le cas où on voudrait déterminer le point x, y, z, pour que l'équilibre eût lieu, il est évident que les deux équations de condition jointes à celle de la surface suffiraient pour cette détermination.

22. Si le point est assujetti à rester sur deux surfaces données $u=o$, $v=o$, ou sur leur courbe d'intersection, il suffira pour l'équilibre que la résultante puisse se décomposer en deux autres normales aux deux surfaces, ou bien qu'elle soit normale à la courbe, c'est-à-dire, perpendiculaire à sa tangente; or, les cosinus des angles de la résultante sont proportionnels à X, Y, Z, tandis que ceux de cette tangente le sont à dx, dy, dz; ainsi, dans ce cas les équations d'équilibre se réduisent à la suivante :

$$Xdx+Ydy+Zdz=o.$$

Prenons, par exemple, pour l'une des surfaces la sphère :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

et pour l'autre le plan $z=o$, en sorte que leur intersection soit un cercle situé dans le plan xy ; alors $dz=o$, on tire de l'équation de la sphère par la différenciation :

$$(x-x_0)dx+(y-y_0)dy=o$$

et l'équation de condition devient :

$$\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy=o$$

ou :

$$\frac{\mathrm{X}}{x-x_0}=\frac{\mathrm{Y}}{y-y_0}.$$

Si les deux surfaces n'étaient pas capables d'une résistance indéfinie, il faudrait, comme précédemment, assigner une limite à la résultante.

De même, lorsque le point ne fait que poser sur la courbe, on doit avoir égard à la direction de la résultante, ce qui n'offre aucune difficulté.

Enfin, s'il fallait déterminer la position du point, cette détermination résulterait de la combinaison de l'équation d'équilibre avec les équations des deux surfaces.

On voit, d'après ce qui précède, que lorsque le point est entièrement libre, et que les trois variables sont indépendantes, il y a trois équations d'équilibre : que lorsque le point est assujetti à rester sur une surface, il n'y a plus que deux variables indépendantes et deux

équations d'équilibre, et que les unes et les autres se réduisent à une seule lorsque le point est astreint à demeurer sur une courbe. Nous verrons plus tard que dans le cas général, le nombre des équations d'équilibre est égal à celui des variables indépendantes.

CHAPITRE II.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE OU D'UN SYSTÈME INVARIABLE; RÉDUCTION DE CE SYSTÈME.

§ Ier.

Force principale, moment principal, axe principal.

23. Soient A, A′, A″, etc., des points de l'espace liés entre eux d'une manière quelconque et auxquels sont appliquées différentes forces : toutes les forces appliquées au point A pouvant être réduites en une seule P, en une seule P′ pour le point A′, ainsi de suite, il suffit de considérer les systèmes des forces P, P′, P″, etc.

Si nous transportons ces forces parallèlement à elles-mêmes, en un point *o* de l'espace, elles auront une résultante R passant par ce point, qui ne sera pas en général la résultante du système donné, et que l'on nomme *force principale*. Cette force sera entièrement déterminée, car si nous conservons les notations précédentes, et si nous observons que les projections des forces appliquées au point *o* sont les mêmes que celles

des forces données, nous en conclurons les équations connues :

$$R\cos. a = P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + \ldots + \text{etc.} = X$$
$$R\cos. b = P\cos.\beta + P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' + \ldots + \text{etc.} = Y$$
$$R\cos. c = P\cos.\gamma + P'\cos.\gamma' + P''\cos.\gamma'' + \ldots + \text{etc.} = Z$$

d'où l'on déduit

$$R = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2},\ \cos. a = \frac{X}{R},\ \cos. b = \frac{Y}{R},\ \cos. c = \frac{Z}{R};$$

ainsi *la force principale est déterminée de grandeur et de direction.*

24. Supposons maintenant que l'on prenne le point o pour centre des moments, et désignons par $p, p',$ $p''\ldots$ les perpendiculaires abaissées du centre des moments sur les directions des forces données. Si l'on construit les moments linéaires des forces, et si l'on appelle λ, μ, ν, $\lambda'\mu'\nu'$ etc., les angles de ces moments avec les axes des coordonnées, K le moment linéaire résultant et l, m, n ses angles avec les axes, les projections de ces moments seront :

$$Pp\cos.\lambda,\ Pp\cos.\mu,\ Pp\cos.\nu,$$
$$Pp\cos.\lambda',\ Pp\cos.\mu',\ Pp\cos.\nu'$$
$$\text{etc., etc.}\ldots$$

et on aura les trois équations :

$$K\cos. l = Pp\cos.\lambda + P'p'\cos.\lambda' + P''p''\cos.\lambda'' + \ldots \text{etc.} = L$$
$$K\cos. m = Pp\cos.\mu + P'p'\cos.\mu' + P''p''\cos.\mu'' + \ldots \text{etc.} = M$$
$$K\cos. n = Pp\cos.\nu + P'p'\cos.\nu' + P''p''\cos.\nu'' + \ldots \text{etc.} = N$$

L, M, N sont les projections du moment résultant, et par suite :

$$K = \sqrt{L^2+M^2+N^2},\quad \cos. l = \frac{L}{K},\ \cos. m = \frac{M}{K},\ \cos. n = \frac{N}{K}:$$

ainsi le moment linéaire résultant est entièrement déterminé.

Si le point o coïncide avec l'origine des coordonnées, les équations précédentes deviennent :

$$L=P(y\cos.\gamma-z\cos.\beta)+\ldots+\text{etc.}$$
$$M=P(z\cos.\alpha-x\cos.\gamma)+\ldots+\text{etc.}$$
$$N=P(x\cos.\beta-y\cos.\alpha)+\ldots+\text{etc.}$$

si au lieu du point o, on prend pour origine un point dont les coordonnées soient x_o, y_o, z_o, et si l'on désigne par L_1, M_1, N_1, les nouvelles valeurs de L, M, N, on aura les nouvelles équations :

$$L_1=P\{(y-y_o)\cos.\gamma-(z-z_o)\cos.\beta\}+\ldots+\text{etc.}$$
$$M_1=P\{(z-z_o)\cos.\alpha-(x-x_o)\cos.\gamma\}+\ldots+\text{etc.}$$
$$N_1=P\{(x-x_o)\cos.\beta-(y-y_o)\cos.\alpha\}+\ldots+\text{etc.}$$

opérant les réductions, et ayant égard à des égalités connues, on en déduit :

$$L_1=L-y_oZ+z_oY,$$
$$M_1=M-z_oX+x_oZ,$$
$$N_1=N-x_oY+y_oX,$$

ce sont les projections du nouveau moment linéaire résultant K_1 que l'on nomme *moment linéaire principal* et qui se trouve déterminé.

Si la force principale est nulle, alors :

$$X=o,\ Y=o,\ Z=o$$
$$\text{et } L_1=L,\ M_1=M,\ N_1=N,$$

ce qui prouve que *lorsque la force principale est nulle, le moment linéaire principal est indépendant du centre des moments.*

25. Si l'on projette le moment linéaire principal K_1

sur la direction de la force principale, en désignant par δ l'angle de cette force avec la direction du moment en question, et en observant que $\frac{L_1}{K_1}, \frac{M_1}{K_1}, \frac{N_1}{K_1}$ sont les cosinus des angles de ce moment avec les axes des coordonnées et $\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R}$ ceux de la force principale avec les mêmes axes, on a évidemment

$$\cos.\delta = \frac{L_1X+M_1Y+N_1Z}{K_1R},$$

d'où, pour la valeur de la projection du moment principal

$$K_1\cos.\delta = \frac{L_1X+M_1Y+N_1Z}{R};$$

remplaçant L_1 M_1 N_1 par leurs valeurs, il vient :

$$K_1\cos.\delta = \frac{LX+MY+NZ}{R},$$

ce qui montre que *la projection du moment principal sur la force principale est une quantité constante.*

26. Il est facile de voir dans quel cas le moment linéaire principal est un *minimum*, car une ligne étant toujours plus grande ou égale à sa projection, il en résulte que *le moment linéaire principal minimum est parallèle à la force principale;* ce que l'on pouvait déduire de l'égalité

$$K_1\cos.\delta = \frac{LX+MY+NZ}{R},$$

car K_1 sera le plus petit possible pour la valeur *maximum* de cos. δ, c'est-à-dire pour $\delta = 0$.

27. On peut encore déterminer le lieu des points

tels que le moment linéaire principal soit un *minimum* en effet : ce moment étant parallèle à la force principale, on a :

$$\frac{L_1}{X} = \frac{M_1}{Y} = \frac{N_1}{Z}$$

ou bien

$$\frac{L - y_0 Z + z_0 X}{X} = \frac{M - z_0 X + x_0 Z}{Y} = \frac{N - x_0 Y + y_0 X}{Z},$$

ainsi *le lieu des points cherchés est une ligne droite* qui se nomme *axe principal.*

28. On peut multiplier les deux termes de la première des fractions précédentes par X, ceux de la deuxième par Y, ceux de la troisième par Z, et égaler chacune d'elles à une quatrième ayant pour termes la somme des termes correspondants des précédentes, cette quatrième fraction se réduit à $\frac{LX+MY+NZ}{R^2}$, on a donc :

$$L - y_0 Z + z_0 X = \frac{LX+MY+NZ}{R} \cdot \frac{X}{R}$$

$$M - z_0 X + x_0 Z = \frac{LX+MY+NZ}{R} \cdot \frac{Y}{R}$$

$$N - x_0 Y + y_0 X = \frac{LX+MY+NZ}{R} \cdot \frac{Z}{R}.$$

Si on mène par l'origine une droite parallèle à l'axe principal, son équation sera de la forme $\frac{\xi}{X} = \frac{\eta}{Y} = \frac{\zeta}{Z}$; or cette droite est parallèle à la force principale, donc

l'axe principal est parallèle à la force principale, et tel que pour chacun de ses points le moment principal est un minimum *et dirigé suivant cet axe.*

29. Quand la force principale s'évanouit, X, Y, Z sont nuls, alors le moment linéaire principal est constant et il n'y a plus d'axe principal.

Fig. 16. 30. Si les forces du système se réduisent à deux, et si la force principale est nulle, il faut que ces deux forces transportées en un même point soient égales, agissent suivant la même droite et en sens contraire, ce qui ne peut avoir lieu que tout autant que dans leur position primitive elles sont égales, parallèles et agissant en sens contraire : ce résultat se déduit aussi du calcul, car de l'équation

$$R\cos.a = P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha'$$

on tire

$$P\cos.\alpha = -P'\cos.\alpha',$$

on trouve de même

$$P\cos.\beta = -P'\cos.\beta',\ P\cos.\gamma = -P'\cos.\gamma'$$

d'où en élevant au carré et ajoutant $P^2 = P'^2$ ou $P = P'$, ainsi les forces sont égales, de plus il en résulte

$$\cos.\alpha = -\cos.\alpha',\quad \cos.\beta = -\cos.\beta',\quad \cos.\gamma = -\gamma',$$

ainsi ces forces sont parallèles et dirigées en sens contraire. Ces deux forces forment ce qu'on appelle un *couple.*

31. Si l'on transporte le centre des moments au point d'application A' de l'une des forces, le moment

de cette force sera nul, et celui de l'autre force par rapport à ce point est ce qu'on nomme le *moment du couple* : ainsi *le moment d'un couple se mesure par le produit de la force* P, *par la distance des deux forces, ou bien par la surface du parallélogramme des deux forces*, et le moment linéaire du couple est égal à celui de la force P : donc, d'après ce qui précède, *le moment linéaire du couple est toujours égal et parallèle au moment linéaire résultant*.

32. Supposons maintenant que toutes les forces du système se réduisent à trois, P, P′, P″, appliquées aux points A, A′, A″ : si la force principale est nulle, et si de plus le moment principal est nul, alors on a les six équations : Fig. 17

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0, \quad L=0, \quad M=0, \quad N=0 :$$

dans ce cas les trois forces sont nécessairement dans le même plan : en effet, supposons que l'on prenne le point A″ pour centre des moments; la force principale étant nulle, le moment principal est indépendant du centre des moments, ainsi il est nul pour le point A″ : or, dans ce cas, le moment de la force P″ étant nul, il faut que les moments linéaires des deux forces P, P′ soient égaux et comptés dans un sens différent sur une perpendiculaire commune au plan des moments des deux forces et passant par le centre A″, c'est-à-dire que les deux forces P, P′ soient dans un même plan : un raisonnement analogue démontrerait que deux autres forces sont dans un même plan, d'où l'on conclut la propriété énoncée.

Evidemment un couple n'a pas de résultante.

§ II.

Equilibre d'un corps solide libre.

33. Cherchons d'abord l'équilibre de deux points liés par une droite.

Fig. 18. Soient A et A′ les deux points en question, nous pouvons toujours réduire toutes les forces à deux forces uniques appliquées à ces deux points, et il suffit d'examiner ce cas. L'équilibre ayant lieu, il ne sera point troublé si nous supposons le point A′ fixe : alors le point A ne pourra prendre qu'un mouvement de rotation autour de A′ et décrira une sphère, ainsi la première condition est que la force appliquée en A soit dirigée suivant le rayon de la sphère AA′ ou son prolongement. On verrait de même que la force appliquée en A′ doit agir suivant AA′ ou son prolongement : ainsi d'abord les deux forces doivent être dirigées suivant la même droite : d'ailleurs il est évident qu'elles ne peuvent agir dans le même sens, puisqu'elles entraîneraient les points d'application : par conséquent elles agissent en sens contraire, et par suite elles sont égales : donc, *les deux forces doivent être égales, de signe contraire, et dirigées suivant la droite que joint les deux points d'application*. De l'expression de ces conditions, il résulte que *la force principale est nulle ainsi que le moment principal*. Réciproquement ces deux dernières conditions sont suffisantes pour qu'il y ait équilibre ; en effet, la force principale étant nulle, les deux forces sont égales, opposées et dirigées suivant la même droite, ou bien elles forment une couple,

condition inadmissible, puisqu'elle est incompatible avec la nullité du moment principal.

34. Les conditions d'équilibre que nous venons d'établir, peuvent se déduire du calcul, en effet, on a les équations :

$$\begin{aligned} R\cos.a &= P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha', \\ R\cos.b &= P\cos.\beta + P'\cos.\beta, \\ R\cos.c &= P\cos.\gamma + P'\cos.\gamma', \\ K\cos.l &= P(y\cos.\gamma - z\cos.\beta) + P'(y\cos.\gamma' - z\cos.\beta'), \\ K\cos.m &= P(z\cos.\alpha - x\cos.\gamma) + P'(z\cos.\alpha' - x\cos.\gamma'), \\ K\cos.n &= P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta) + P'(y\cos.\alpha' - x\cos.\beta') . \end{aligned}$$

mais la force principale étant nulle, les trois premières donnent :

$$P\cos.\alpha = -P'\cos.\alpha',\ P\cos.\beta = -P'\cos.\beta,\ P\cos.\gamma = -P'\cos.\gamma'$$

d'où $P = P'$, et par suite :

$$\begin{aligned} \cos.\alpha &= -\cos.\alpha', \\ \cos.\beta &= -\cos.\beta', \\ \cos.\gamma &= -\cos.\gamma' \end{aligned}$$

ainsi l'on retombe sur les conditions énoncées

Introduisant ces conditions dans les trois équations des moments, après y avoir fait $K = 0$, il vient :

$$P(y - y')\cos.\gamma = P\cos.\beta(z - z')$$

où :

$$\frac{P\cos.\beta}{y - y'} = \frac{P\cos.\alpha}{x - x'}$$

et de même au moyen des deux autres :

$$\frac{P\cos.\gamma}{z - z'} = \frac{P\cos.\alpha}{x - x'},\quad \frac{P\cos.\alpha}{x - x'} = \frac{P\cos.\beta}{y - y'} ;$$

ainsi les trois équations d'équilibre se réduisent aux deux :

$$\frac{P\cos.\alpha}{x-x'}=\frac{P\cos.\beta}{y-y'}=\frac{P\cos.\gamma}{z-z'},$$

et de plus on peut poser :

$$\frac{P\cos.\alpha}{x-x'}=\frac{P\cos.\beta}{y-y'}=\frac{P\cos.\gamma}{z-z'}=\frac{P\cos.\alpha'}{x'-x}=\frac{P\cos.\beta'}{y'-y}=$$

$$=\frac{P\cos.\gamma'}{z'-z}.$$

ce qui montre que les projections des forces sont proportionnelles aux dérivés de l'expression :

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=\text{constante},$$

équation qui exprime que la distance des deux points d'application est invariable.

Dans ce cas le nombre des variables indépendantes est six; ainsi, d'après ce que nous avons dit plus haut il devrait y avoir six conditions d'équilibre, tandis qu'il n'y en a que cinq, mais cela n'a rien de contraire au principe énoncé, car il est facile de voir que le nombre des variables indépendantes se réduit à cinq par l'équation de condition qui exprime que la distance des deux points est invariable.

35. C'est ici le cas de démontrer *qu'une force peut être appliquée en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce point et le point d'application soient liés invariablement, et que le moment linéaire de la force reste le même.*

Fig. 18. Considérons une force P appliquée au point A, elle

peut être appliquée en un point quelconque, A″ de sa direction, en effet : appliquons aux deux points A′, A″ liés entre eux et au point A deux forces égales et contraires ; ces deux forces se détruisant, le système ne sera pas changé, mais d'un autre côté les deux forces appliquées aux points A, A′ se font équilibre, et il ne reste plus que la force P″ qui produit le même effet que P, et qui, étant appliquée au point A″, peut être considérée comme étant la force P transportée au point A″. En outre il est évident que le moment linéaire n'a pas changé.

36. Passons maintenant à l'équilibre de trois points liés entre eux d'une manière invariable.

Cela revient à trouver l'équilibre de trois points Fig. 19.
situés aux trois sommets d'un triangle, et le cas général revient à celui où chaque sommet n'est soumis qu'à une force. Soient donc les trois forces P, P′, P″, appliquées au sommets A, A′, A″ ; l'équilibre ne sera point troublé en supposant fixés deux des points A′, A″, alors le point A ne pouvant prendre qu'un mouvement de rotation autour de l'axe A′A″, et ne pouvant décrire qu'un cercle perpendiculaire à cet axe, l'équilibre ne pourra avoir lieu qu'autant que la force P sera normale à ce cercle au point A ; ainsi la force P devra se trouver dans le plan AA′A″ ; en considérant ainsi les forces deux à deux, on conclura, par un raisonnement analogue que chacune des trois forces, et par conséquent les trois forces doivent se trouver dans le plan de leurs points d'application : maintenant on peut décomposer la force P′ en deux autres suivant A′A″ et A′A, et qu'on peut transporter aux points A, A″ : ainsi le système se compose de quatre forces

appliquées en A et A″; mais les deux agissant en A, se réduisent en une seule; de même les deux forces appliquées en A″ se réduisent en une seule agissant au même point, et tout le système est changé en celui de deux forces agissant aux extrémités d'une droite; et l'on retombe sur un cas déjà examiné; or, dans cette transformation la force principale et le moment linéaire principal n'ont pas changé, donc, pour que l'équilibre ait lieu, il faut que *la force principale et le moment linéaire principal soient nuls*. Ces conditions sont suffisantes, car alors les trois forces sont nécessairement dans un même plan.

Réciproquement, les deux conditions précédentes emportent l'équilibre, car les trois forces étant dans le même plan, on pourra, comme précédemment, les réduire à deux forces appliquées à deux des sommets; or, les deux conditions d'équilibre en question établissent l'équilibre de ces deux forces; donc elles établissent également celui des trois premières qui ont même force principale et même moment linéaire principal.

Ici nous avions neuf indéterminées, et les six équations d'équilibre :

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=0,\quad L=0,\quad M=0,\quad N=0,$$

mais cela doit être puisqu'il y a toujours trois équations de condition qui font disparaître trois variables.

Fig 20. 37. Considérons un système invariable quelconque. Soient A, A′A″, etc., les points d'application des forces que nous supposons réduites à une seule en chaque point. Prenons trois points quelconques A, A′A″,

du système, et joignons-les par des droites. Si le plan AA′A″ ne renferme aucun des autres points, en joignant le point A‴ avec chacun des trois points, on formera un tétraèdre, et on pourra décomposer la force appliquée en A‴, en trois autres dirigées suivant les arêtes de l'angle trièdre A‴ : cela fait, ces forces pourront être appliquées aux points correspondants A, A′, A″, en portant successivement le sommet du tétraèdre à chacun des points du système, on verra que tout le système peut être remplacé par des forces appliquées à trois points, et par suite à trois forces uniques appliquées à ces points. Dans le cas où certains points se trouvent dans le plan des trois premiers, si les forces elles-mêmes agissent dans ce plan, on pourra les changer en d'autres forces appliquées aux points primitifs; si ces forces ne sont pas dans le plan des trois premiers points, on peut les appliquer à un point quelconque de leur direction, et on retombe sur le cas précédent. Ainsi, dans tous les cas, l'équilibre du système se réduit à celui de trois forces appliquées à trois points liés entre eux : or, dans les transformations effectuées, la force principale et le moment linéaire principal n'ont pas changé: donc les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un système invariable, sont que *la force principale soit nulle et que le mouvement linéaire principal soit nul.*

Les équations d'équilibre sont d'après cela :

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=0,\quad L=0,\quad M=0,\quad N=0:$$

le principe énoncé semble être en défaut, car il n'y a que six équations d'équilibre, et le nombre des variables indépendantes peut être très-considérable.

Mais il faut observer qu'un corps quelconque est déterminé lorsqu'il est fixé par trois de ses points, et qu'ainsi il n'y a jamais plus de neuf variables indépendantes qui se réduisent à six par les trois équations de condition, qui expriment que ces trois points sont liés entre eux d'une manière invariable.

38. Lorsque toutes les forces du système sont dans un même plan, on peut prendre ce plan pour celui des xy; alors les angles $\gamma, \gamma', \gamma''$, sont droits, et les coordonnées z, z', z'', etc., sont nulles; donc dans ce cas particulier on a :

$$Z=0, \quad M=0, \quad N=0,$$

et les équations d'équilibre se réduisent à

$$X=0, \quad Y=0, \quad L=0.$$

39. Les conditions d'équilibre que nous venons d'établir pour un système invariable sont entièrement les mêmes pour un corps solide, car ce dernier n'est qu'un cas particulier d'un système invariable lié par des droites.

Ces conditions d'équilibre doivent subsister pour tout autre système, mais alors elles cessent d'être suffisantes, et il faut y joindre dans chaque cas, comme nous le verrons bientôt, des conditions spéciales.

Fig. 21. 40. Ce qui précède suffit pour trouver les conditions d'équilibre de deux corps V, V', qui s'appuient l'un contre l'autre par le point de contact o. En effet, supposons que les quantités X, Y, Z, L, M, N, du corps V se changent en X', Y', Z', L', M', N', pour le corps V', et appelons x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point de contact, et a', b', c' les angles de om avec les axes

des coordonnées. Le corps V′ opposera une résistance égale à la première R que lui fera éprouver le corps V : ainsi il suffit de chercher isolément l'équilibre de chacun des corps, en ajoutant aux forces qui le sollicitent une force R agissant suivant *mo* pour le premier et *m′o*, pour le deuxième; les équations d'équilibre sont donc, d'un côté :

$$X + R\cos.a' = 0,\ Y + \cos.b' = 0,\ Z + R\cos.c' = 0$$
$$L + R(x_o\cos.b' - y_o\cos.a') = 0,$$
$$M + R(z_o\cos.a' - x_o\cos.c') = 0$$
$$N + R(y_o\cos.c' - z_o\cos.b') = 0,$$

et de l'autre :

$$X' - R\cos.a' = 0,\ Y = -R\cos.b' = 0,\ Z - R\cos.c' = 0$$
$$L - R(x_o\cos.b' - y_o\cos.a') = 0,\ M - R(z_o\cos.a' - x_o\cos.c') = 0$$
$$N - R(y\cos.c' - z\cos.b') = 0 :$$

ajoutant les équations correspondantes deux à deux, on trouve immédiatement :

$$X + X' = 0,\ Y + Y' = 0,\ Z + Z' = 0$$
$$L + L' = 0,\ M + M' = 0,\ N + N' = 0.$$

Les douze équations d'équilibre se réduisent à onze par l'élimination de R, qui devra être une quantité positive pour que les deux corps s'appuient réellement l'un contre l'autre.

Quel que soit le nombre de corps en contact, il sera aisé de trouver les conditions d'équilibre, dont le nombre sera six fois celui des corps moins celui des contacts.

§ III.

Systèmes équivalents.

41. On dit que deux systèmes de forces sont *équivalents* lorsqu'ils sont, chacun en particulier, capables de faire équilibre à un même troisième système; ainsi supposons que le système des forces P, P', P'', etc., agisse sur des points liés entre eux par telles conditions qu'on voudra; si ces forces ne sont pas capables d'établir l'équilibre et que ce dernier ait lieu par l'addition d'un système de forces R, R', R'', etc., si en outre le système auxiliaire nécessaire pour maintenir l'équilibre, lorsque les forces P, P', P'', etc., sont remplacées par d'autres Q, Q', Q'', etc., est encore R, R', R'', etc., les deux systèmes P, P', P'', etc., Q, Q', Q'', etc., sont équivalents. Désignons par X, Y, Z les sommes des projections des forces P, P', P'', etc., sur les axes, par X_1, Y_1, Z_1 celles des forces Q, Q', Q'', etc., et enfin par X_2, Y_2, Z_2, celles des forces auxiliaires; puisque ce dernier système fait équilibre à chacun des deux autres, on aura :

$$X+X_2=0,\ Y+Y_2=0,\ Z+Z_2=0$$

de même :

$$X_1+X_2=0,\ Y_1+Y_2=0,\ Z_1+Z_2=0,$$

d'où l'on déduit :

$$X=X_1,\ Y=Y_1,\ Z=Z_1:$$

on trouverait de même évidemment :

$$L=L_1,\ M=M_1,\ N=N_1.$$

donc pour *que deux systèmes soient équivalents, il faut et il suffit que la force principale et le moment linéaire principal soient les mêmes.*

42. Maintenant il est facile de voir dans quel cas un système invariable peut se réduire à une *force unique*; en effet, supposons que cette force unique R existe; et désignons par a, b, c ses angles avec les axes des coordonnées, par X, Y, Z, ses projections sur ces axes par K son moment linéaire, et enfin par l, m, n, L, M, N, les angles et les projections de ce moment, alors on aura les six équations (*c*) :

$$R\cos.a = X,\ R\cos.b = Y,\ R\cos.c = Z \text{ et } K\cos.l = L,\ K\cos.m = M,\ K\cos.n = N:$$

or, les trois premières sont précisément celles qui déterminent la force principale de grandeur et de direction, et de même les trois autres ont servi à déterminer la grandeur et la direction du moment linéaire principal; ainsi la force unique doit être égale et parallèle à la force principale et son moment linéaire doit être égal et parallèle au moment linéaire principal; d'après cela, si par l'origine des coordonnées centre des moments, on mène le moment linéaire principal et un plan linéaire perpendiculaire à sa direction et qui sera le plan des moments, la résultante devra être dans ce plan, et la force principale qui lui est parallèle sera aussi parallèle au plan des moments, et par suite perpendiculaire au moment linéaire principal; ainsi on a l'équation de condition :

$$\cos.a\cos.l + \cos.b\cos.m + \cos.c\cos.l = 0$$

ou bien (*d*) $LX + MY + NZ = 0$; on a de plus $X' + Y' + Z' = 0$,

car évidemment les trois quantités X, Y, Z ne peuvent pas être nulles en même temps; donc l'existence d'une force unique dépend de celle de ces deux équations.

Réciproquement ces deux équations étant satisfaites, il y a une résultante unique : pour le prouver, il suffit de faire voir que l'on peut toujours trouver une force telle que les équations (c) soient satisfaites. Par l'origine des coordonnées, menons une ligne qui fasse avec les axes des angles l,m,n, et sur cette ligne, construisons le moment linéaire principal; puis par l'origine même, traçons un plan perpendiculaire à cette ligne, et tirons également une autre ligne qui fasse avec les axes des angles a,b,c. Cette dernière sera la force principale qui sera parallèle au plan des moments dont nous avons l'équation (d); donc il sera possible de tracer dans ce plan une force parallèle à la force principale et de prendre sur sa direction une longueur égale à la force principale, alors les trois premières équations (c) sont satisfaites, et la résultante est déterminée de grandeur et de direction, et il ne reste plus qu'à fixer un de ses points. D'abord elle ne peut pas passer par l'origine, puisque son moment $K = Rr$ n'est pas nul et si par cette origine on tire une ligne perpendiculaire à sa direction, en prenant de part et d'autre sur cette ligne une longueur égale à

$$r = \frac{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}{R}$$

et en menant par les extrémités de ces deux longueurs deux lignes égales et parallèles à la force principale,

la résultante ne pourra prendre que l'une de ces deux positions, mais son moment linéaire devant aussi être égal et parallèle au moment linéaire principal qui est déterminé de sens par rapport à l'origine, il faudra prendre celle des deux forces précédentes qui tendra à faire tourner le plan du moment linéaire principal par un mouvement direct, ainsi la résultante unique est parfaitement déterminée : donc les deux équations

$$LX+MY+NZ=0,\quad X^2+Y^2+Z^2>0$$

sont nécessaires et suffisantes.

On peut arriver autrement aux conditions d'équilibre. D'abord nous sommes toujours maîtres de prendre une force égale et parallèle à la force principale, et les trois premières des équations (*c*) sont satisfaites. Il ne reste plus qu'à chercher s'il existe dans l'espace un point x,y,z, tel que si on y applique la force précédente, les trois autres équations (*c*) soient satisfaites ; or, dans ce cas ces équations deviennent :

$$R(y\cos.c-z\cos.b)=L,\quad R(z\cos.a-x\cos.c)=M,$$
$$R(x\cos.b-y\cos.a)=N \text{ ou } yZ-zY=L,$$
$$zX-xZ=M,\quad xY-yX=N:$$

multipliant la première par X, la deuxième par Y, la troisième par Z, et ajoutant, il vient :

$$LX+MY+NZ=0,$$

équation connue, et qui montre que ces trois équations n'en forment que deux distinctes, et qu'il y a une infinité de points en ligne droite qui peuvent satisfaire à la question, ce qui doit être, puisque la résultante

peut être appliquée en un point quelconque de sa direction.

43. Reprenons les deux équations précédentes

$$LX+MY+NZ=0,\ X^2+Y^2+Z^2>0:$$

si la seconde n'est pas satisfaite, et si on a au contraire

$$X^2+Y^2+Z^2=0 \text{ ou } X=0,\ Y=0,\ Z=0,$$

il n'y aura pas de résultante unique, et la somme des projections sur chacun des axes étant nulle, le système ne pourra se réduire qu'à un couple. Il est facile de prouver qu'en effet il existe toujours un couple capable de faire équilibre au système des forces données ce qui se réduit à démontrer la possibilité de trouver un couple dont le moment linéaire soit égal et parallèle au moment linéaire principal : or, si par un point quelconque de l'espace on mène un plan perpendiculaire au moment linéaire principal, tout couple tracé dans ce plan aura son moment linéaire parallèle au moment principal. Soit Q la force du couple et q la perpendiculaire abaissée sur sa direction du point d'application de l'autre force, il reste à satisfaire à l'égalité

$$Qq=\sqrt{L^2+M^2+N^2}:$$

ce qui peut se faire d'une infinité de manières, en déterminant convenablement Q ou q d'après la valeur de q ou Q : donc *le système peut toujours se réduire à un couple*, et le sens de ce couple est déterminé, puisqu'il doit imprimer un mouvement direct au plan des moments.

44. Quel que soit le système, on peut toujours le décomposer en deux autres tels que, pour le premier,

les quantités X, Y, Z, L, M, N deviennent X, Y, Z, 0, 0, 0, et pour le deuxième 0, 0, 0, L, M, N : le premier aura une résultante unique; le deuxième se réduira à un couple : donc *tout système peut être ramené à une force et un couple.*

45. Observons maintenant que, d'après ce qui précède, un couple peut être transporté partout où on voudra dans son plan ou dans tout autre plan parallèle et tourné arbitrairement dans ce plan : par conséquent, on peut disposer du couple précédent de manière que l'une des extrémités du bras du couple coïncide avec le point d'application A de la force unique R'; alors les deux forces P, R' se composent en une seule R, qui n'est pas en général dans le même plan que l'autre force du couple : donc *un système quelconque invariable de forces peut toujours se réduire à deux forces qui ne sont pas en général dans le même plan.* Fig. 22.

De plus, il y a une infinité de manières d'opérer cette réduction, car le couple peut être changé en un autre équivalent d'une foule de manières. On voit en effet que pour un couple, la force principale étant nulle, la condition nécessaire et suffisante pour que deux couples soient équivalents, est que le moment linéaire soit le même, et il y a évidemment une infinité de manières de la remplir. On voit encore qu'on peut toujours disposer du moment de manière que l'une des forces soit appliquée à l'origine des coordonnées.

46. On peut opérer la réduction d'un système de plusieurs autres manières. Ainsi, par exemple, rien ne nous empêche de partager le système donné en deux autres tels que pour le premier, les quantités X, Y, Z,

L, M, N deviennent X, Y, 0, 0, 0, N, et pour le deuxième 0, 0, Z, L, M, 0 : dans ces deux nouveaux systèmes, la condition $LX+MY+NZ=0$ est toujours satisfaite, en sorte que le premier peut se transformer en une force unique ou un couple, selon que les quantités X, Y ne seront pas ou seront nulles : s'il y a une force unique, les projections du moment linéaire principal ou du moment linéaire de cette force sur les axes des x et des y étant nulles, il en résulte que ce moment linéaire est parallèle à l'axe des z, ou que la force elle-même se trouve dans le plan xy, et passe de plus par l'origine dans le cas où $N=0$: s'il y a un couple, son moment linéaire étant toujours égal et parallèle au moment linéaire principal, ce couple se trouve encore dans le plan xy, et quand $N=0$, le point d'application de l'une des forces est à l'origine. De même, le deuxième système se réduira à un couple ou à une force selon que z sera ou ne sera pas nul. Dans le deuxième cas, la projection du moment linéaire sur l'axe des z étant nulle, le plan des moments, et par suite cette force est parallèle à l'axe des z et passe par l'origine si $L=0$, $M=0$: si c'est un couple, on en conclura également que son plan est parallèle à l'axe des z : donc on peut toujours transformer un système invariable en deux autres dirigés, l'un dans le plan des xy, l'autre parallèlement à l'axe des z ou perpendiculaire au premier plan, ou bien parce que l'axe des z est arbitraire, *on peut toujours changer le système en deux autres, l'un parallèle à un axe donné, l'autre situé dans un plan perpendiculaire à cet axe.*

§ IV.

Equilibre d'un corps solide assujetti à certaines conditions.

47. Si le système invariable ou corps solide qui doit rester en équilibre renferme un point fixe, rien ne nous empêche de prendre ce point fixe pour centre des moments et d'y placer l'origine des coordonnées : or, d'après ce qui précède, on peut réduire le système à une force passant par l'origine, qui est détruite par la résistance du point fixe, et à un couple dont l'une des forces est encore appliquée à l'origine où elle est détruite : il ne reste plus que la deuxième force du couple : pour que cette dernière ne trouble point l'équilibre, il faudra qu'elle soit appliquée à l'origine, ou que le moment linéaire du couple soit nul : mais ce moment est égal au moment linéaire principal, les équations d'équilibre sont donc

$$K=0 \text{ ou } L=0,\ M=0,\ N=0.$$

48. Supposons que le système ou corps solide soit assujetti à tourner autour d'un axe fixe sans pouvoir glisser dans le sens de sa longueur : prenons l'axe fixe pour axe des z, et plaçons l'un des points fixes à l'origine des coordonnées. Comme dans le cas que nous venons d'examiner, il n'y aura que le couple qui pourra troubler l'équilibre : pour qu'il ne produise aucun effet, il suffira qu'il rencontre l'axe des z, ou que cet axe soit compris dans le plan du couple, ou bien enfin que la projection sur l'axe des z du moment linéaire du couple

ou du moment linéaire principal soit nulle, ce qui fournit une seule équation d'équilibre $N=0$.

Si le corps pouvait en outre prendre un mouvement de translation le long de l'axe fixe, le plan du couple devrait toujours passer par cet axe, ce qui reproduit l'équation $N=0$; mais il ne suffirait plus que la force unique passât par l'origine pour être détruite, il faudrait encore qu'elle fût située dans le plan des xy perpendiculaire à l'axe fixe, ce qui exige que sa projection sur l'axe des z soit nulle, ou que l'on ait $Z=0$: les deux équations d'équilibre sont donc :

$$Z=0,\ N=0.$$

49. Supposons enfin que le système ou le corps soit assujetti à la condition qu'un certain nombre de ses points doivent rester dans un plan donné, en sorte que le système ne puisse prendre qu'un mouvement de translation ou de rotation le long de ce plan, c'est-à-dire de manière que chacun de ses points décrive des lignes parallèles à ce plan.

Prenons ce plan pour plan des xy : nous pouvons décomposer le système en deux autres, l'un parallèle à l'axe des z, l'autre situé dans le plan xy ; le premier ne peut produire aucun effet, mais pour que le deuxième ne trouble point l'équilibre, il faut que la résultante soit nulle, ou que l'on ait $X=0$, $Y=0$; il faut de plus que $N=0$, car autrement, comme nous l'avons vu, ce système se réduirait à un couple situé dans le plan xy, et qui imprimerait un mouvement. Les équations d'équilibre sont donc :

$$X=0,\ Y=0,\ N=0.$$

50. On peut remarquer que dans les divers systèmes que nous venons de considérer, le nombre des conditions d'équilibre est encore égal à celui des variables indépendantes. En effet, dans le cas d'un point fixe l'on peut prendre ce point pour l'un des trois points qui suffisent pour fixer un système quelconque : alors il n'y a plus que six variables indépendantes, mais la distance des deux autres points et celles de ces derniers au point fixe devant rester invariables, les variables indépendantes se réduisent à trois comme les conditions d'équilibre; dans le cas d'un axe fixe, on peut prendre cet axe pour axe des z, et alors le troisième point étant déterminé par deux de ses coordonnées, doit se trouver sur un cercle perpendiculaire à cet axe. Il n'y a donc qu'une variable indépendante, comme il n'y a qu'une équation d'équilibre. Si en outre le système peut prendre un mouvement de translation, il y a deux variables indépendantes et deux équations d'équilibre. Enfin dans le cas d'un plan fixe, les trois points peuvent être pris dans ce plan qui n'est autre chose que celui des xy; alors il y a six variables indépendantes qui se réduisent à trois, puisque les distances de ces trois points doivent rester invariables et on a aussi trois équations d'équilibre $X=0$, $Y=0$, $N=0$ qui sont précisément celles d'un système de forces situées dans un même plan.

51. Nous venons de voir que lorsque $N=0$, le système est en équilibre autour de l'axe des z, on verrait de même que pour $L=0$, il est équilibre autour de l'axe des x, et pour $M=0$ autour de l'axe des y; d'où l'on conclut que ces trois équations ayant lieu en même temps, le système ne peut prendre qu'un mouvement

autour de l'origine : ce n'est pas une démonstration rigoureuse, mais une analogie utile à remarquer, et qui montre que pour qu'un système reste en équilibre autour d'un point fixe, il suffit qu'il reste en équilibre autour de trois axes rectangulaires menés par ce point et regardés successivement comme des axes fixes.

52. Les différents cas d'équilibre d'un corps assujetti à certaines conditions renferment les machines simples, telles que le levier, la poulie, le treuil, le plan incliné et l'application de la théorie à ces machines n'offre aucune difficulté; nous nous contenterons de rapporter ici ce qui concerne le levier.

Nous avons vu que lorsque le système renferme un point fixe, les conditions d'équilibre sont :

$$L=0,\ M=0,\ N=0,$$

ou bien

$$\begin{aligned} Pp\cos.\alpha+P'p'\cos.\alpha'+\&=0 \\ Pp\cos.\beta+P'p'\cos.\beta'+\&=0 \\ Pp\cos.\gamma+P'p'\cos.\gamma'+\&=0. \end{aligned}$$

Si le système se réduit à deux forces, ces équations deviennent :

$$Pp\cos.\alpha=-P'p'\cos.\alpha',\quad Pp\cos.\beta=-P'p'\cos.\beta',$$
$$Pp\cos.\gamma=-P'p'\cos.\gamma',$$

d'où l'on déduit

$$Pp=P'p' \text{ et } \cos.\alpha=-\cos.\alpha'$$
$$\cos.\beta=-\cos.\beta',\ \cos.\gamma=-\cos.\gamma':$$

ainsi, dans ce cas, les moments des deux forces sont égaux, comptés sur la même droite et en sens contraire, ce qui montre que les forces sont dans un même plan.

qu'elles agissent en sens contraire, et qu'elles ont des moments égaux : donc, pour l'équilibre d'un levier sollicité par deux forces, il faut *que ces forces soient dans un même plan, qu'elles tendent à faire tourner le levier en sens contraire, et qu'elles soient entre elles inversement comme les perpendiculaires abaissées du point d'appui sur leur direction.*

On peut parvenir directement à ce résultat, car le moment principal étant nul, les moments des deux forces doivent être égaux et de signe contraire, ou bien les deux forces doivent être dans le même plan, agir en sens contraire, et de plus l'égalité des moments emporte la condition que les forces soient entre elles inversement comme les perpendiculaires abaissées du point d'appui sur leurs directions.

Si le levier est droit et les forces parallèles, l'inspection seule de la figure montre que les forces sont en raison inverse du bras de levier. Le calcul confirme ce résultat. En effet, le point d'appui étant à l'origine, les équations d'équilibre sont, en appelant xyz, $x'y'z'$ les coordonnées des points d'applications

$$P(y\cos.\gamma - z\cos.\beta) + P'(y'\cos.\gamma' - z'\cos.\beta') = 0$$
$$P(z\cos.\alpha - x\cos.\gamma) + P'(z'\cos.\alpha' - x'\cos.\gamma') = 0$$
$$P(x\cos.\beta - y\cos.\alpha) + P'(x'\cos.\beta' - y'\cos.\alpha') = 0$$

d'où l'on tire

$$\frac{Px+P'x'}{\cos.\alpha} = \frac{Py+P'y'}{\cos.\beta} = \frac{Pz+P'z'}{\cos.\gamma} :$$

et ces dernières équations sont satisfaites en posant

$$Px = -P'x', \quad Py = -P'y', \quad Pz = -P'z'.$$

d'où

$$\frac{P}{P'} = -\frac{x'}{x} = = \frac{y'}{y} = -\frac{z'}{z} = \frac{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}:$$

égalités qui montrent que les points xyz, $x'y'z'$ sont sur une ligne droite passant par l'origine, et que les forces P, P' sont en raison inverse des bras de leviers.

CHAPITRE III.

RÉDUCTION, COMPOSITION ET EQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE FORCES PARALLÈLES.

53. Considérons un système de forces parallèles appliquées à des points liés entre eux d'une manière invariable, et conservons toujours les mêmes notations: puisque les forces sont toutes parallèles, on aura, suivant qu'elles agiront dans le même sens ou en sens contraire,

$$\cos.\alpha' = \pm \cos.\alpha, \quad \cos.\beta' = \pm \cos.\beta, \quad \cos.\gamma' = \pm \cos.\gamma,$$

de même

$$\cos.\alpha'' = \pm \cos.\alpha, \quad \cos.\beta'' = \pm \cos.\beta, \quad \cos.\gamma'' = \pm \cos.\gamma, \text{ etc.}$$

et les valeurs de **X, Y, Z** deviennent

$$X = (P \pm P' \pm P''...) \cos.\alpha, \quad Y = (P \pm P' \pm P''..) \cos.\beta,$$
$$Z = (P \pm P' \pm P''...) \cos.\gamma:$$

il faut observer de prendre dans ces trois équations le

même signe pour chaque force : par la même raison les valeurs de L, M, N sont dans ce cas

$$L=(Py\pm P'y'\pm P''y''\ldots)\cos.\gamma-(Pz\pm P'z'\pm P''z''\ldots)\cos.\beta$$
$$M=(Pz\pm P'z'\pm P''z''\ldots)\cos.\alpha-(Px\pm P'x'\pm P''x''\ldots)\cos.\gamma$$
$$N=(Px\pm P'x'\pm P''x''\ldots)\cos.\beta-(Py\pm P'y'\pm P''y''\ldots)\cos.\alpha$$

en donnant encore dans chaque équation le même signe à chaque force. Or, si l'on multiplie ces trois dernières équations, la première par cos. α, la deuxième par cos. β et la troisème par cos. γ, il vient, en ajoutant

$$L\cos.\alpha+M\cos.\beta+N\cos.\gamma=0$$

et en vertu des valeurs précédentes de X, Y, Z, cette égalité équivaut à la suivante

$$LX+MY+NZ=0:$$

donc, d'apres ce que nous avons vu, *un système de forces parallèles est toujours réductible à une force unique ou à un couple selon qu'on a*

$$X^2+Y^2+Z^2>0 \text{ ou } X^2+Y^2+Z^2=0$$

54. En élevant au carré les valeurs de X, Y, Z et ajoutant, on obtient

$$X^2+Y^2+Z^2=R^2=(P\pm P'\pm P''\ldots)^2$$

ou

$$\pm R=P\pm P'\pm P''\ldots$$

Il y a une somme de forces positives et une somme de forces négatives ; mais rien ne nous empêche de prendre pour le sens positif celui de la plus grande somme, et de supposer que P appartient à cette dernière, alors

on a simplement

$$R = p' \pm p'' \ldots :$$

ainsi *la force principale est égale à la somme des forces proposées :* de plus on a :

$$X = R\cos.a, \quad Y = R\cos.b, \quad Z = R\cos.c,$$

en vertu de ces équations et de l'expression de R, les valeurs primitives de X, Y, Z donnent

$$\pm\cos.a = \cos.\alpha, \quad \pm\cos.b = \cos.\beta, \quad \pm\cos.c = \cos.\gamma,$$

ce qui montre que *la force principale est parallèle aux forces proposées et agit dans le sens de la plus grande somme :* donc aussi la force unique ou la *résultante est parallèle aux forces données et égale à leur somme algébrique.*

Si la somme des forces qui agissent dans un sens est égale à celle des forces qui agissent dans un sens opposé, la résultante R est nulle, et le système se réduit à un couple dont le plan est parallèle aux forces données, ou dont le moment linéaire est perpendiculaire à la direction de ces forces : pour le démontrer, il suffit de faire voir que le moment linéaire principal qui lui est égal est perpendiculaire aux directions des forces. Or, nous avons trouvé ci-dessus l'équation

$$L\cos.\alpha + M\cos.\beta + N\cos.\gamma = 0;$$

nous avons de plus

$$K\cos.l = L, \quad K\cos.m = M, \quad K\cos.n = N,$$

ainsi on peut remplacer L, M, N par les quantités proportionnelles

$$\cos.\alpha, \; \cos.\beta, \; \cos.\gamma$$

et on obtient

$$\cos.\alpha\cos.l+\cos.\beta\cos.m+\cos.\gamma\cos.n=0,$$

ce qu'il fallait établir.

Voyons maintenant quels sont les points d'application de la force unique ou de la résultante lorsqu'elle existe.

Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées des points cherchés, nous avons vu que pour que deux systèmes soient équivalents, il faut que la force principale et le moment principal soient les mêmes : ainsi, dans le cas qui nous occupe, le moment linéaire de la force unique doit être égal au moment linéaire principal, ou bien avoir les mêmes projections sur les axes : cette condition est exprimée par les trois équations

$$R(\eta\cos.\gamma-\zeta\cos.\beta)=L, \qquad R(\zeta\cos.\alpha-\xi\cos.\gamma)=M,$$
$$R(\xi\cos.\beta-\eta\cos.\alpha)=N:$$

or, ces trois équations se réduisent à deux, car en les multipliant respectivement par $\cos.\alpha$, $\cos.\beta$, $\cos.\gamma$, on tombe sur l'identité $0=0$: donc le lien des points cherchés est une droite, ce qui devait être, et l'on peut voir de nouveau que cette droite est parallèle aux forces données, car si par l'origine on mène une force parallèle à la droite donnée par les équations précédentes, ses équations seront $\frac{\xi}{\cos.\alpha}=\frac{\eta}{\cos.\beta}=\frac{\zeta}{\cos.\gamma}$: ainsi cette force est parallèle à celles du système.

55. Si dans les équations précédentes on remplace L, M, N par leur première valeur en fonction des forces,

on aura

$$R(\eta\cos.\gamma-\zeta\cos.\beta)=(Py\pm P'y'\ldots)\cos.\gamma-(Pz\pm P'z'\ldots)\cos.\beta$$
$$R(\zeta\cos.\alpha-\xi\cos.\gamma)=(Pz\pm P'z'\ldots)\cos\ \alpha-(Px\pm P'x'\ldots)\cos.\gamma$$
$$R(\xi\cos.\beta-\eta\cos.\alpha)=(Px\pm P'x'\ldots)\cos\ \beta-(Py\pm P'y'\ldots)\cos.\alpha$$

Ces trois équations sont satisfaites en posant :

$$(3)\ R\eta=Py\pm P'y'\pm\ldots \quad (2)\ R\zeta=Pz\pm P'z'\pm\ldots$$
$$(1)\ R\xi=Px\pm P'x'\pm\ldots$$

ces équations déterminent le point d'application ξ, η, ζ de la résultante : on voit que les valeurs de ces coordonnées sont indépendantes de α, β, γ, c'est-à-dire de la direction des forces, donc le point ainsi déterminé appartient à la résultante, quelle que soit la direction des forces, et alors même que toutes les forces varient proportionnellement ; ce point se nomme *centre des forces parallèles*.

Les coordonnées du centre des forces parallèles sont

$$\xi=\frac{Px\pm P'x'\pm\ldots}{P\pm P'\ldots},\ \eta=\frac{Py\pm P'y'\ldots}{P\pm P'\ldots},\ \zeta=\frac{Pz\pm P'z'\ldots}{P\pm P'\ldots}$$

or il est évident que $\frac{Px+P'x'+\ldots}{P+P'+\ldots}$ est une moyenne entre les abscisses x, x', x'', &, d'où il est aisé de conclure que lorsque toutes les forces agissent dans le même sens, le centre des forces est entre les deux points d'application les plus éloignés ; c'est pour cela que le centre des forces parallèles a reçu pendant longtemps la fausse dénomination de *centre des moyennes distances*.

56. On appelle moment d'une force, par rapport à un plan, le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur le plan,

donc les équations (1) (2) (3) sont faciles à traduire, et elles expriment que *le moment de la résultante, par rapport à chacun des plans coordonnés, et par suite par rapport à un plan quelconque, est égal à la somme des moments des composantes par rapport au même plan.*

D'après cela, les coordonnées du *centre* s'obtiennent en divisant les sommes des moments des composantes, par rapport à chaque plan des coordonnées par la somme des forces.

51. *Si tous les points d'application sont dans un même plan, le centre des forces s'y trouvera* aussi : en effet, si on projette les points d'application sur un axe perpendiculaire à ce plan, toutes les projections se réuniront en une seule qui sera aussi celle du centre des forces, puisque ce dernier se trouve entre les points d'application, du moins, lorsque les forces agissent dans un même sens, mais cela est vrai lorsque les forces agissent en sens divers ; prenons pour plan des xy le plan des forces, alors tous les z des points d'applications seront nuls, et par suite ζ le sera aussi ; ou bien encore soit

$$Ax+By+Cz=D$$

le plan donné ; si on multiplie les équations (1),(2),(3), par A,B et C, l'on obtient en ajoutant

$$R(A\xi+B\eta+C\zeta)=D(P\pm P'\pm L)=DR,$$

ou

$$A\xi+B\eta+C\zeta=D,$$

ce qui montre que le centre des forces se trouve dans le plan donné.

58. *Si tous les points d'application sont sur une même droite, le centre des forces est sur cette droite, car il doit se trouver dans tous les plans passant par cette droite.*

Considérons le cas de deux forces agissant aux extrémités d'une droite, alors on a

$$R\xi = Px \pm P'x', \qquad R\eta = Py \pm P'y', \qquad R\zeta = Pz \pm P'z',$$

si elles agissent dans le même sens,

$$R = P + P',$$

et par suite

$$(P+P')\xi = Px + P'x', \ (P+P')\eta = Py + P'y', \ (P+P')\zeta = Py + P'y',$$

d'où

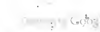
$$\frac{P'}{P} = \frac{x-\xi}{\xi-x'} = \frac{y-\eta}{\eta-y'} = \frac{z-\zeta}{\zeta-z'} = \frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}{\sqrt{(\xi-x')^2+(\eta-y')^2+(\zeta-z')^2}},$$

ce qui prouve que le point d'application de la résultante, se trouve sur la droite d'application, entre ces deux points d'application, et divise cette droite en parties inversement proportionnelles aux forces. Si les forces agissaient en sens contraire, on aurait

$$\frac{P'}{P} = \frac{\xi-x}{\zeta-x'} = \frac{\eta-y}{\eta-y'} = \frac{\zeta-z}{\zeta-z'} = \frac{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}}{\sqrt{(\xi-x')^2+(\eta-y')^2+(\zeta-z')^2}},$$

ainsi dans ce cas, le point d'application de la résultante se trouverait en dehors des deux points d'application du côté de la plus grande force.

Du reste, nous allons voir que la géométrie conduit directement à ce résultat et aux précédents.



59. Soient P et Q les deux composantes agissant aux points a et b de la droite inflexible ab, suivant des directions parallèles et dans le même sens. Fig. 23

Concevons deux forces égales chacune à la force Q, et appliquées aux prolongements des droites ab et $b'b$: alors on a un système de quatre forces; mais les deux forces égales qui agissent en sens contraire aux extrémités de ligne bb' se détruisent, il ne reste que les deux forces P et Q dirigées suivant aa' et ab : si l'on divise ab en deux parties ao et cb proportionnelles aux forces Q et P, et si on prend $ao=cb$, la diagonale ae sera la résultante des deux forces concourantes P et Q, ou des quatre forces ; tirons la ligne ces prenant $ep=et=ac$, et prolongeons ae d'une longueur égale em : on voit que la diagonale eg est la résultante des deux forces Q agissant suivant ab et $b'b$, d'un autre côté em est la résultante en grandeur et en direction des quatre forces, donc, si on achève le parallélograme $egmn$, en sera en grandeur et en direction la résultante des deux forces parallèles P,Q, or,

$$en=gm=pm+gp=ac+ao=cb+ac,$$

et, de plus en est le prolongeant de co : d'où il résulte que *la résultante de deux forces parallèles agissant dans le même sens, leur est parallèle, est égale à leur somme, et divise la droite d'application en parties inversement proportionnelles aux forces.*

L'inspection de la figure suffit pour démontrer que, dans le cas où les deux *composantes agissent en sens contraire, la résultante leur est parallèle, est égale à leur différence et agit en dehors de la droite d'application, du côté et dans le sens de la plus grande des deux composantes.* Fig. 24.

D'après ce qui précède, on voit que la composition d'un nombre quelconque de forces parallèles, n'offre aucune difficulté, et qu'il suffit de composer deux de ces forces en une seule, puis celle-ci et une troisième encore en une seule, et ainsi de suite : on obtiendra ainsi la résultante en grandeur et en direction, à moins que le système ne se réduise à un couple : cette résultante sera évidemment parallèle aux composantes et égale à la somme de celles qui agissent dans un sens, moins la somme de celles qui agissent en sens contraire.

On voit aussi que le point d'application de la résultante est indépendant de l'inclinaison des forces, et qu'ainsi, si on fait varier cette inclinaison, les résultantes successives viennent toutes se couper en un point qui est le *centre des forces parallèles*.

Nous verrons par la suite combien ce point est important à considérer dans l'équilibre des corps pesants, mais nous pouvons déjà remarquer que si, dans un corps donné, le centre des forces parallèles est fixe, le corps restera en équilibre dans toutes ses positions autour de ce point, pourvu que les forces qui le sollicitent, restent parallèles et appliquées aux mêmes points.

60. Nous avons vu que pour un système invariable entièrement libre, les conditions d'équilibre sont :

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=0,\quad L=0,\quad M=0,\quad N=0,$$

lorsque toutes les forces du système sont parallèles, leurs angles avec chacun des axes sont égaux ou supplément ou bien simplement égaux, en ayant soin de donner à chaque force le signe qui lui convient,

ainsi les trois premières équations se réduisent à une seule

$$P+P'+P''+\alpha=0,$$

et les trois autres deviennent :

$$(Px+P'x')\cos.\beta=(Py+P'y')\cos.\alpha.$$
$$(Pz+P'z')\cos.\gamma=(Px+P'x')\cos.\gamma,$$
$$(Py+P'y')\cos.\gamma=(Pz+P'z')\cos.\beta.$$

ces trois dernières se réduisent à deux, car, si on les ajoute après les avoir multipliées par $\cos,\gamma,\cos.\beta,\cos.\gamma$, on tombe sur une identité : par conséquent, si on prend le plan des x,y perpendiculaire à la direction des forces, les deux autres équations d'équilibre seront :

$$Px+P'x'+\alpha=0, \qquad Py+P'y'+\gamma=0,$$

Donc, pour l'équilibre d'un système de forces parallèles appliquées à un corps solide entièrement libre, il faut :

1° Que *la somme de ces forces soit égale à zéro.*

2° Que *la somme de leurs moments, par rapport à deux plans parallèles à leur direction soit aussi nulle.*

La réciproque est évidente :

On peut parvenir directement aux conditions précédentes, cela n'offre aucune difficulté.

61. S'il y a un point fixe dans le système, il suffira pour l'équilibre des forces parallèles que la somme de leurs moments soit nulle, par rapport à deux plans parallèles à leur direction, et passant par le point fixe, car alors, la résultante devant se trouver dans ces deux plans, sera dirigée suivant leur intersection

et détruite par la résistance du point fixe; si ce point était le centre des forces parallèles, il y aurait constamment équilibre.

62. Si le système est retenu par un axe fixe, autour duquel il a seulement la liberté de prendre un mouvement de rotation, il suffit, pour l'équilibre des forces, que la somme de leurs moments soit nulle par rapport à un plan mené par ces axes parallèlement à leur direction, car la résultante se trouvant dans ce plan, sera détruite par la résistance de l'axe qu'elle rencontrera.

Si l'axe est parallèle aux forces, la condition unique d'équilibre s'évanouit par l'indétermination du plan de construction : et en effet, dans ce cas, les forces ne sauraient imprimer au système un mouvement de rotation autour de cet axe.

CHAPITRE IV.

DÉTERMINATION DES CENTRES DE GRAVITÉ.

§ Ier.

Considérations générales sur les corps pesants et les centres de gravité.

63. Dans les applications de la mécanique aux travaux des arts, la gravité ou force qui attire tous les corps vers le centre de la terre, est regardée comme agissant suivant des directions parallèles à la verticale,

c'est-à-dire, à la direction du fil à plomb, ou de la perpendiculaire à la surface des eaux : de plus, cette force est supposée constante, c'est-à-dire, exerçant toujours sur chaque partie du corps une action dont l'intensité est toujours la même : en effet, les dimensions des corps qui sont l'objet de nos calculs, ou les espaces qu'ils parcourent dans leurs mouvements, sont en général trop petits pour qu'il soit nécessaire d'avoir égard au changement de direction de la gravité, ou aux variations que subit (comme on le verra dans la suite), l'intensité de cette force : ainsi les notions présentées sur la composition des forces parallèles, s'appliquent aux actions exercées par la gravité, sur divers corps ou sur les parties d'un même corps.

64. En représentant par M et V la masse et le volume d'un corps, si le corps est homogène, $\frac{M}{V} = D =$ constantes, c'est-à-dire que la densité est la même pour tous les points du corps, car la masse varie proportionnellement au volume : si le corps n'est pas homogène, deux volumes égaux pouvent ne pas renfermer deux masses égales, cependant pour ce corps hétérogène $\frac{M}{V} = D$ sera la densité moyenne sous le volume V. Considérons un point d'une masse solide et imaginons un très-petit volume v qui contient ce point : ce petit volume renferme une petite masse m, et d'après ce que nous venons de dire, $\frac{m}{v} = d$ est la densité moyenne de la masse solide m. Concevons que v décroisse, m décroît aussi, v et m s'approchent simultanément et indéfiniment de o, à la limite on a $\frac{0}{0}$, et la li-

mite fixe vers laquelle converge ce rapport, se nomme la densité du corps au point considéré : ainsi la densite d'un corps en un point donné d'un solide, est la limite vers laquelle converge le rapport d'un volume qui contient ce point à la masse qu'il renferme, en supposant que cette masse et ce volume élémentaire s'approchent indéfiniment de o, et se réduisent à un point. Ainsi, en général on a pour la densité

$$d = l.\frac{m}{v} = \rho,$$

et généralement

$$\rho = f(x, y, z).$$

Un raisonnement analogue s'applique aux surfaces et aux lignes.

65. Considérons un système formé de plusieurs points matériels, pesants, assujettis entre eux d'une manière invariable. Les poids respectifs de ces points matériels sont autant de forces verticales, et par conséquent, parallèles entre elles, par lesquelles ils sont sollicités. Si nous désignons par P l'un quelconque de ces poids, et par x, y, z les distances du point matériel à trois plans rectangulaires, les distances ξ, η, ζ du centre des forces parallèles aux mêmes plans seront exprimées par les formules

$$\xi = \frac{\int .Px}{\int .P}, \qquad \eta = \frac{\int .Py}{\int .P}, \qquad \zeta = \frac{\int .Pz}{\int .P}.$$

quand il s'agit de poids, le centre des forces parallèles prend le nom de *centre de gravité*; aussi, les expressions précédentes représentent les coordonnées du centre de gravité de plusieurs points matériels pe-

sants, en fonction des coordonnées de ces points matériels, et de leurs poids respectifs.

66. La position du centre de gravité relativement aux parties du système demeure la même, quelle que soit la situation du système dans l'espace; ce système serait en équilibre si le centre de gravité devenait fixe; les poids de tous les points matériels sont donc soutenus lorsque l'on soutient le centre de gravité, comme si toutes les parties du système étaient concentrées dans ce point.

67. Si au lieu de considérer un système de points matériels pesants, on considère un système formé de plusieurs corps solides qui ont de l'étendue, on pourra lui appliquer les formules précédentes, les coordonnées x,y,z appartiendront respectivement aux centres de gravité de chacun de ces corps, et ξ,η,ζ seront les coordonnées de leur centre de gravité commun.

68. Les mêmes principes s'appliquent à la recherche du centre de gravité commun des parties d'un même corps. En général, un corps n'est pas homogène, en sorte que ses parties n'ont pas toutes la même densité. Supposons les parties de divers points du corps rapportées à trois plans rectangulaires, au moyen des coordonnées x,y,z; nous désignerons par ρ le poids que les parties du corps présenteront sous l'unité du volume dans ce point, dont les coordonnées sont x,y,z, ou la densité en ce point, et par P le poids total du corps, le poids de l'élément du volume $dx.dy.dz$, qui est placé dans ce point, sera donc exprimé par $\rho dx.dy.dz$. Ainsi en nommant ξ,η,ζ les coordonnées du centre de gravité, nous aurons, conformément aux principes exposés dans les cours d'analyses infinitisimales

$$P=\int dx\int dy\int dz.\rho, \qquad \xi=\frac{\int dx\, x\int dy\int dz.\rho}{P},$$

$$\eta=\frac{\int dx\int dy.y\int dz.\rho}{P}, \qquad \zeta=\frac{\int dx\int dy\int dz.\rho z}{P},$$

La quantité ρ doit être exprimée en fonction des coordonnées x,y,z : on substituera sa valeur dans les formules précédentes. La figure de la surface qui termine le corps, doit également être donnée par une équation entre x,y,z ; les limites des intégrales commencent et finissent aux valeurs de chaque coordonnée qui appartiennent aux limites du corps. Ainsi : 1° l'on prendra la première intégrale par rapport à z, entre les valeurs de z, données en x et y par l'équation de la surface, qui appartiennent aux deux nappes opposées entre lesquelles le corps est compris ; 2° la deuxième intégrale, par rapport à y, sera prise entre la plus petite et la plus grande valeur de y que donnera l'équation de la surface, quand on y fera varier z seule, valeurs qui seront exprimées en x : la troisième intégrale, par rapport à x, sera prise entre la plus petite et la plus grande valeur de x qui satisfassent à l'équation de la surface.

Lorsque les corps ne sont point enveloppés par une surface dont la nature puisse être définie par une seule équation, on décompose alors les intégrales définies en plusieurs parties dont on calcule séparément les valeurs, en se conformant à ce qui vient d'être indiqué.

69. Si la densité est uniforme, ρ devient un facteur constant qui disparaît dans les expressions de ξ,η,ζ : ces expressions se réduisent alors à

$$\xi=\frac{\int dx.x\int dy\int dz}{A},\ \eta=\frac{\int dx\int dy.y\int dz}{A},\ \zeta=\frac{\int dx\int dy\int dz.z}{A},$$

A désignant le volume du corps.

70. On est quelquefois dans le cas de considérer un corps, dont une dimension est constante et infiniment petite : c'est ce qu'on appelle chercher le centre de gravité d'une surface. Supposons cette surface donnée par une équation, entre l'ordonnée z et les abscisses x,y. Soit ρ la valeur du poids de la surface dans le point dont les abscisses sont $x.y$, pour une étendue égale à l'unité de surface. Le poids de l'élément de l'aire de la surface au même point, sera exprimé par

$$\rho dxdy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}.$$

ainsi, nommant comme ci-dessus P le poids total du corps et ξ,η,ζ, les coordonnées du centre de gravité, nous aurons :

$$P=\int dx\int dy\rho\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}.$$

$$\xi=\frac{\int dx.x\int dy\rho\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}.}{P}$$

$$\eta=\frac{\int dx\int dy.\rho y\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}.}{P}$$

$$\zeta=\frac{\int dx\int dy.\rho z\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}.}{P}$$

On doit, avant les intégrations, substituer dans les

formules pour z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ leur valeur en x,y donnée par l'équation connue de la surface. Les limites des intégrales sont déterminées par les valeurs des coordonnées x,y qui correspondent aux limites de la surface. On doit substituer également pour ρ sa valeur en fonction de x,y.

71. Si la densité est uniforme on a simplement

$$\xi = \frac{\int dx.x\int dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}{A}$$

$$\nu = \frac{\int dx\int dy.y\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}{A}$$

$$\zeta = \frac{\int dx\int dy.z\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}{A}$$

A désignant l'aire de la surface.

72. Enfin, l'on peut considérer un corps dont deux dimensions seraient constantes et infiniment petites, ce qu'on appelle chercher le centre de gravité d'une ligne. Nous supposons en général, cette ligne donnée par deux équations, l'une entre x et y, l'autre entre z et x; et nous désignerons par ρ la valeur du poids de la ligne pour une unité de longueur, qui convient au point dont les coordonnées sont x,y,z, le poids de l'élément de la ligne placé à ce point sera

$$\rho dx.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

par conséquent, P représentant le poids total de la

ligne, et ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité, nous aurons

$$P = \int dx.\rho \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

$$\xi = \frac{\int dx.\rho x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{P},$$

$$\eta = \frac{\int dx.\rho y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{P},$$

$$\zeta = \frac{\int dx.\rho z \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{P},$$

la valeur de ρ, qui doit être donnée en fonction de x et celles de $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$, qui le sont également, doivent être substituées dans ces formules, les intégrales sont prises entre les valeurs de x, qui répondent aux points extrêmes de la ligne proposée.

73. Si les poids des parties égales de cette ligne sont partout les mêmes, les expressions de ξ, η, ζ deviennent

$$\xi = \frac{\int dx.x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{A},$$

$$\eta = \frac{\int dx.y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{A},$$

$$\zeta = \frac{\int dx.z \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{A},$$

A désignant la longueur de la ligne.

74. Il convient quelquefois, pour la facilité des calculs, de rapporter les points du corps à d'autres coordonnées, mieux appropriées à leur figure que ne le sont les coordonnées rectangulaires. On ne s'arrêtera pas à détailler les formules générales que l'on peut obtenir de cette manière, et qui sont toujours déduites des mêmes principes. Quelquefois aussi, la figure particulière du corps indique sur-le-champ le mode de décomposition en éléments différentiels, par le moyen duquel une seule opération suffit pour déterminer le centre de gravité. On reconnaît immédiatement que si un corps homogène peut être partagé en parties symétriques par un plan, ou plus généralement, si un corps quelconque peut être partagé par un plan vertical en deux parties dont les poids se feraient équilibre autour d'un axe horizontal placé dans ce plan, les plans dont il s'agit, contiendront nécessairement le centre de gravité du corps; cette seule considération suffit quelquefois pour faire connaître ce point: souvent elle en réduit la recherche à celle de deux ou d'une seule coordonnée.

Nous allons, dans les paragraphes suivants, faire l'application des principes généraux que nous venons de développer.

§ II.

Centre de gravité des lignes.

75. Considérons un arc quelconque, nommons X, x_o les abscisses de ses extrémités; soit s un élément, h sa projection sur l'axe de x et d, son inclinaison sur cet

axe. Posons de plus $\frac{dy}{dx}=y'$ $\frac{dz}{dx}=z'$: nous aurons d'après ce que nous avons vu

$$P=\int_{x_0}^{X}\rho\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx = \int_{x_0}^{X}\rho\,\text{séc.}\,\delta\,dx,$$

et par suite

$$P\xi=\int_{x_0}^{X}\rho x\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx, \quad P\eta=\int_{x_0}^{X}\rho y\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,$$

$$P\zeta=\int_{x_0}^{X}\rho z\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,$$

ou bien

$$\xi=\frac{\int_{x_0}^{X}\rho x\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx}{\int_{x_0}^{X}\rho\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx}, \quad \eta=\frac{\int_{x_0}^{X}\rho y\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx}{\int_{x_0}^{X}\rho\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx},$$

$$\zeta=\frac{\int_{x_0}^{X}\rho z\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx}{\int_{x_0}^{X}\rho\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx}$$

Si ρ est une quantité constante, alors

$$\xi=\frac{\int_{x_0}^{X}x\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx}{\int_{x_0}^{X}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx}=\frac{\int_{x_0}^{X}x\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx}{l},$$

l étant la longueur de l'arc, et de même

$$\eta=\frac{\int_{x_0}^{X} y\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx}{l},\qquad \zeta=\frac{\int_{x_0}^{X} z\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx}{l}.$$

76. Si sec. θ devient aussi une constante, il vient

$$\xi=\frac{\int_{x_0}^{X} x\,dx}{\int_{x_0}^{X} dx}=\frac{(X^2-x_0^2)}{2}:X-x_0=\frac{X+x_0}{2}.$$

donc *le centre de gravité d'une ligne droite est à son milieu* : il en est de même pour une portion d'hélice.

Fig. 25. 77. Soit un arc de cercle AoB : d'après la disposition de la figure, le centre de gravité de cet arc sera déterminé par sa hauteur au dessus de l'axe des abscisses ou par la valeur de η, car il se trouve évidemment sur l'axe de y qui divise cet arc en deux parties égales, soit

$$AB=C,\qquad AoB=l,\qquad Do=r,$$

on a, d'après ce qui précède,

$$l\eta=\int_{-x_0}^{x_0} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

or

$$y'=-\frac{x}{y},$$

d'où

$$l\eta=\int_{-x_0}^{x_0} y\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y^2}\,dx=r\int_{-x_0}^{x_0} dx=2x_0r,$$

et

$$\eta=\frac{r.2x_0}{l}=\frac{cr}{l}.$$

ainsi *le centre de gravité d'un arc de cercle est sur le rayon qui le divise en deux parties égales, à une distance du centre quatrième proportionnelle à l'arc, à la corde et au rayon.*

§ III.

Centre de gravité d'une surface plane.

78. Dans le cas que nous considérons, les formules relatives aux surfaces se simplifient et deviennent

$$P = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \rho\, dy dx, \qquad P\xi = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \rho\, x dy dx,$$

$$P\eta = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \rho\, y dy dx,$$

Si ρ est constant

$$A\xi = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{X} x dy dx, \qquad A\eta = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} y dy dx.$$

la surface est située dans le plan des x, y.

79. Supposons qu'il s'agisse d'un triangle oAB; plaçons le sommet à l'origine des coordonnées, et prenons l'axe des y parallèle à la base : les équations de oA et oB, sont Fig. 26.

$$y = ax, \qquad y = a'x$$

et en se rappelant que dans la formule y et $y_{\prime}$ désignent les équations des deux courbes qui comprennent la surface, on aura

$$A\xi = \int_0^h \int_{a'x}^{ax} x dy dx = \int_0^h x^2 (a - a')\, dx = \frac{h^3}{3}(a - a');$$

or, $h,(a-a')=AB=b$ basc du triangle, donc

$$A\xi=\frac{h^2}{3}\times b \qquad \text{d'où} \qquad \xi=\frac{\frac{h^2 b}{3}}{\frac{hb}{2}}=\frac{2}{3}h:$$

donc, *le centre de gravité d'un triangle est distant du sommet des deux tiers de la hauteur correspondante.*

Fig. 27. 80. Supposons maintenant, que la surface donnée est *un trapèze* oABC, qu'on est maître de disposer de manière que l'une des bases parallèles coïncide avec l'axe des y: il est évident que le centre de gravité se trouve sur la ligne menée par les milieux des deux bases parallèles : cela posé, les équations AB et oC, étant $y=ax+b'$, $y=a'x$, on a

$$A\xi=\int_0^h\int_{a'x}^{ax+b'} xdydx=\int_0^h (x(a-a'x)+b')\,dx=$$
$$=\frac{h^3}{3}(a-a')+\frac{b'h^2}{2}$$

d'où

$$\xi=\frac{\frac{h^3}{3}(a-a')+\frac{b'h^2}{2}}{\frac{1}{2}(b+b')h}=\frac{h}{3}\,\frac{(2h(a-a')+3b')}{b+b'},$$

or, $h(a-a')=b-b'$, donc

$$\xi=\frac{h}{3}\left(\frac{2(b-b')+3b'}{b+b'}\right)=\frac{h}{3}\left(\frac{2b+b'}{b+b'}\right).$$

cette formule comprend comme cas particulier le parallélogramme et le triangle.

81. Cherchons le centre de gravité d'un *segment parabolique* OQP : plaçant le sommet à l'origine et l'équation de la parabole étant $y=a,x^2$, on a Fig. 28.

$$A\xi=\int_{X_0}^{X}\int_{o}^{ax^2}xdydx=\int_{x_0}^{X}ax^3dx=\frac{ax^4}{4}=\frac{X^2Y}{4}$$

et

$$\xi=\frac{\frac{X^2Y}{4}}{\frac{1}{3}XY}=\frac{3}{4}X,$$

de même

$$\eta=\frac{3}{10}Y:$$

au contraire, s'il s'agissait de la parabole $y^2=ax$, on trouverait

$$\xi=\frac{3}{5}X \quad \text{et} \quad \eta=\frac{3}{8}Y.$$

82. S'il s'agissait du demi-cercle MON, il suffirait d'obtenir η : or, on a Fig. 25.

$$A\eta=\int_{-r}^{r}\int_{o}^{\sqrt{r^2-x^2}}ydydx=\int_{-r}^{r}\left(\frac{r^2-x^2}{2}\right)dx=$$

$$r^3-\frac{r^3}{3}=\frac{2}{3}r^3,$$

et

$$\eta=\frac{\frac{2}{3}r^3}{\frac{\pi}{2}r^2}=\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}:$$

résultat assez remarquable.

83. Enfin, si la surface donnée était une demi-ellipse, ayant pour axes $2a$ et $2b$, on aurait

$$\eta=\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} ydydx=\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2-x^2}{2}\right)dx=$$

$$=b^2a-\frac{b^2a^3}{3a^2}=\frac{2b^2a}{3}$$

et

$$\eta=\frac{\frac{2b^2a}{3}}{\pi\frac{ab}{2}}=\frac{4}{3}\frac{b}{\pi}:$$

ce qui prouve que *toutes les ellipses qui ont même petit axe, ont même centre de gravité*, aussi, en faisant $b=r$, on retombe sur la valeur trouvée pour le cercle.

§ IV.

Centre de gravité des surfaces courbes.

84. Les formules propres à la détermination du centre de gravité d'une surface courbe sont

$$P\xi=\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\rho x dy dx\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

$$P\eta=\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\rho y dy dx\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

$$P\zeta=\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\rho z dy dx\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

ou bien en appelant δ l'inclinaison variable sur le plan x,y

$$\text{P}\xi = \int_{x_0}^{\text{X}}\int_{y_0}^{\text{Y}} \rho x \sec.\theta\, dydx,$$

$$\text{P}\eta = \int_{x_0}^{\text{X}}\int_{y_0}^{\text{Y}} \rho y \sec.\theta\, dydx,$$

$$\text{P}\zeta = \int_{x_0}^{\text{X}}\int_{y_0}^{\text{Y}} \rho z \sec.\theta\, dydx.$$

85. Quand la densité est constante ces formules se réduisent à

$$\text{A}\xi = \int_{x_0}^{\text{X}}\int_{y_0}^{\text{Y}} \sec.\theta\, xdydx,$$

$$\text{A}\eta = \int_{x_0}^{\text{X}}\int_{y_0}^{\text{Y}} \sec.\theta\, ydydx,$$

$$\text{A}\zeta = \int_{x_0}^{\text{X}}\int \sec.\theta\, dydx.$$

86. Quand l'inclinaison devient constante, on a simplement;

$$\xi = \frac{\int_{x_0}^{\text{X}}\int_{y_0}^{\text{Y}} xdydx}{\text{A}}, \quad \eta = \frac{\int_{x_0}^{\text{X}}\int_{y_0}^{\text{Y}} ydydx}{\text{A}},$$

$$\zeta = \frac{\int_{x_0}^{\text{X}}\int_{y_0}^{\text{Y}} zdydx}{\text{A}},$$

alors *le centre de gravité de la projection est la projection du centre de gravité de la surface*, et la hauteur ζ de ce centre de gravité, au-dessus de sa base placé sur le plan des x,y est $\frac{\text{V}}{\text{A}}$, V étant le volume compris entre la surface et le plan des $x\,y$ et A l'aire

de la projection : d'après cela *le centre de gravité de la surface d'un cône droit à base circulaire, est sur son axe à une distance de la base* à $\frac{\frac{1}{3}bh}{b} = \frac{h}{3}$, c'est-à-dire, *à un tiers de la hauteur*, ou en d'autres termes, ce centre de gravité est le même que celui du triangle double et du triangle générateur. Si la surface devient un triangle, alors V représente le volume d'un prisme tronqué, ayant pour mesure la projection du triangle multipliée par le tiers de la somme des hauteurs des sommets de ce triangle, et A est la surface même de la projection ; par conséquent, *la distance du centre de gravité d'un triangle à un plan quelconque, est égale au tiers de la somme des distances de ses trois sommets au même plan.*

87. Si la surface devient de révolution, alors on a

$$P = 2\pi\int_{x_0}^{X} \rho N dx,$$

(N désignant la normale), et

$$P\xi = 2\pi\int_{x_0}^{X} x\rho N dx,$$

et si ρ devient constant, on a simplement

$$\xi = \frac{2\pi\int^{X} xN dx}{A},$$

et

$$\eta = 0, \qquad \zeta = 0.$$

par exemple, pour une zône sphérique, $M=r$ (rayon de la sphère), et $\xi=\frac{1}{2}(x+x_0)$: donc *le centre de gravité d'une zône sphérique est au milieu de sa hauteur.* On verrait de même que *le centre de gravité de la surface d'un cylindre, est au milieu de son axe*, que celui *de la surface d'un cône droit est au tiers de son axe*, etc.

88. De ce qui précède, on déduit facilement la surface d'une zône sphérique, car

$$A=2\pi r\int_{x_0}^{X}dx=2\pi r(x-x_0),$$

résultat géométrique connu. Pour la zône elliptique

$$N=y\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{y^2+y^2y'^2},$$

or, on a

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

différentiant, il vient

$$\frac{x}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0,\quad yy'=-\frac{b^2}{a^2}x,\quad y^2y'^2=\frac{b^4}{a^4}x^2,$$

d'ailleurs,

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

donc

$$N=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2+\frac{b^2}{a^2}x^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2},$$

d'où

$$A=2\pi\frac{b}{a}\int_{x_0}^{X}\sqrt{a^2-\left(1-\frac{b^2}{az}\right)x^2dx}:$$

représentons par $\pm \iota^2$, la constante $1-\frac{b^2}{a^2}$ qui est positive ou négative, selon que $a>b$ et $a<b$, alors

$$A=2\pi\frac{b\iota}{a}\int_{x_0}^{X}\sqrt{\frac{a^2}{\iota^2}\mp x^2dx},$$

égalons à c la constante $\frac{a}{\iota}$, et nous aurons

$$A=2\pi\frac{b}{c}\int_{x^0}^{X}\sqrt{c^2\mp x^2dx};$$

or, la quantité :

$$\frac{b}{c}\int_{x_0}^{X}\sqrt{c^2\mp x^2dx}$$

n'est autre chose que la surface d'un segment d'ellipse ou d'hyperbole : si on prend x^2 avec le signe *moins*, c'est-à-dire si $a^2<b^2$, ce sera l'aire d'un segment de l'ellipse $\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{c^2}=1$; si on prend x^2 avec le signe *plus*, c'est-a-dire si $a^2<b^2$, alors la même quantité sera un segment de l'hyperbole $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}=1$ et multipliant dans l'un et l'autre cas le segment par 2^π on aura l'aire de la zône elliptique.

§ V.

Centre de gravité des volumes.

89. Nous avons vu que dans ce cas, on a

$$P=\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\varphi dzdydx$$

et

$$P\xi = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \rho x dz dy dx,$$

$$P\eta = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \rho y dz dy dx,$$

$$P\zeta = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \rho z dz dy dx.$$

en supposant ρ constant, il vient

$$P\xi = \rho \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} x dz dy dx,$$

et comme x est une constante par rapport aux deux premières intégrales, le deuxième membre peut se mettre sous la forme

$$\rho \int_{x_0}^{X} \left\{ x \int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} dz dy \right\} dx,$$

or, la quantité entre parenthèses est le produit de x par l'aire U d'une section plane du volume et perpendiculaire à l'axe des x et menée à une distance x du plan xy; de plus ρ étant constant, P devient le volume A du corps donné, ainsi

$$\xi = \frac{\rho \int_{x_0}^{X} Ux dx}{A} = \frac{\int_{x_0}^{X} Ux dx}{\int_{x_0}^{X} U dx},$$

une transformation analogue peut s'opérer sur les valeurs de η et ζ.

Pour un volume de révolution autour de l'axe des x, il suffit de remplacer U par πy^2, dans la valeur de ξ et $\eta = o$, $\zeta = o$.

Appliquons ce qui précède à quelques exemples.

Fig. 29. 90. Considérons un cône droit engendré par la droite oB ou $y=ax$, et ayant pour axe oX : cette dernière ligne contient évidemment le centre de gravité, qui sera complétement déterminé par la valeur de ξ : or, si $oA=h$, $AB=b$, il s'ensuit que

$$\xi=\frac{\pi\int_0^h a^2x^3dx}{\pi\int_0^h a^2x^2dx}=\frac{a^2h^4}{4}:\frac{a^2h^3}{3}=\frac{3}{4}h,$$

donc *le centre de gravité d'un cône droit, est sur son axe au quart à partir de la base, et aux trois-quarts à partir du sommet.*

91. Pour avoir le centre de gravité d'un tronc de cône, il faudrait intégrer la même expression entre les limites h et h', $h-h'$ étant la hauteur du tronc; cela n'offre pas de difficultés.

92. Supposons qu'il s'agisse de l'ellipsoïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et cherchons le centre de gravité de sa moitié comprise entre l'origine et un plan diamétral parallèle au plan yz, on a

$$A\xi=\int_0^a Uxdx,$$

mais ici

$$U=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

ainsi

$$A\xi=\pi bc\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)xdx=\pi bc\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{4a^2}\right)=\frac{\pi a^2bc}{4};$$

or

$$A = \pi bc\left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) = \frac{2\pi abc}{3};$$

ainsi

$$\xi = \frac{3}{8}a,$$

valeur très-simple et d'autant plus remarquable qu'elle est indépendante des deux demi-axes b et c. Donc *le centre de gravité est le même pour un ellipsoïde de révolution autour de l'axe* **a** *, et par suite pour la sphère d'un rayon* **a** comme on peut le vérifier aisément.

93. Si on applique la même formule aux volumes engendrés par les deux paraboles

$$y^2 = ax, \quad y = ax^2,$$

on trouvera pour la première

$$\xi = \frac{2}{3}X,$$

et pour la seconde

$$\xi = \frac{5}{6}X:$$

on peut rapprocher ces deux résultats de la valeur $\xi = \frac{3}{4}X$ trouvée pour le cône droit.

94. prenons pour dernière application, le volume engendré par la demi-*lemnicaste* dont l'équation est

$$y = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a}:$$

alors

$$A\xi = \frac{\pi}{a^2}\int_0^a x^3(a^2 - x^2)dx = \frac{\pi}{a^2} \times \frac{1}{12}a^6 = \frac{1}{12}\pi a^4,$$

d'où

$$\xi = \frac{\pi a^4}{12} : \frac{2}{15}\pi a^3 = \frac{5}{8}a,$$

résultat remarquable.

95. La géométrie donne les moyens de déterminer la plupart des centres de gravité : nous n'en parlerons point ici, et nous renverrons à notre ouvrage sur cette matière (1).

§ VI.

Méthode des tranches.

96. Comme nous l'avons dit dans le premier paragraphe, quelquefois la figure du corps indique sur-le-champ un mode de décomposition des éléments différentiels, par le moyen duquel une seule opération suffit pour déterminer le centre de gravité. La *méthode des tranches*, que nous allons exposer, n'est autre chose qu'une pareille décomposition.

Une surface plane étant comprise entre deux courbes $y=Y$ $y=y_0$ et les ordonnées correspondantes aux abscisses X et x_0, nous avons trouvé pour son centre de gravité

$$\xi = \frac{\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} xdydx}{\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} dydx}, \qquad \eta = \frac{\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} ydydx}{\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} dydx}:$$

Cela posé, divisons la surface en tranches élémentai-

(1) *Essai sur la détermination des centres de gravité*, suivi de notes, 2e édition, considérablement augmentée, chez Carilian-Gœury et V. Dalmont, libraires-éditeurs, quai des Augustins, n. 39 et 41.

res par des parallèles à l'axe des y : pour une de ces tranches $pmnq$ les coordonnées du centre de gravité s'obtiendront en remplaçant dans les valeurs précédentes x_0 par x et X par $x+\Delta x$, alors Fig. 30.

$$\xi=\frac{\int_{x}^{x+\Delta x}\int_{y_0}^{Y}\rho x dy dx}{\int_{x}^{x+\Delta x}\int_{y_0}^{Y}\rho dy dx},\quad \eta=\frac{\int_{x}^{x+\Delta x}\int_{y_0}^{Y}\rho y dy dx}{\int_{x}^{x+\Delta x}\int_{y_0}^{Y}\rho dy dx};$$

or, on a généralement

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx=(X-x_0)f(x+\theta)(X-x_0)=\Delta x f(X+\theta\Delta x)=$$
$$=\Delta x f(x\pm\varepsilon'),$$

et de même

$$\int_{0}^{X} F(x)dx=\Delta x F(x\pm\varepsilon''),$$

d'où

$$\frac{\int_{x_0}^{X} f(x)dx}{\int_{x_0}^{X} F(x)dx}=\frac{f(x\pm\varepsilon')}{F(x\pm\varepsilon'')}=\frac{f(x)}{F(x)}\pm\varepsilon,$$

et par suite

$$\xi=\frac{\int_{y_0}^{Y}\rho x dy}{\int_{y_0}^{Y}\rho dy}\pm\varepsilon=\frac{x\int_{y_0}^{Y}\rho dy}{\int_{y_0}^{Y}\rho dy}\pm\varepsilon=x\pm\varepsilon,$$

et

$$\eta=\frac{\int_{y_0}^{Y}\rho y dy}{\int_{y_0}^{Y}\rho dy};$$

ainsi, l'abscisse du centre de gravité de la tranche est la même que celle de l'ordonnée *pm*, d'ailleurs, la valeur de η est la même que celle du centre de gravité de cette ligne, c'est-à-dire de son milieu : d'après cela, *le centre de gravité d'une tranche se trouve au milieu de la ligne limite de cette tranche*, et par suite *lorsque les centres de gravité des différentes droites qui forment les tranches sont sur une droite, cette dernière contient le centre de gravité de la surface*, etc.

97. On déduit de là que le *centre de gravité d'un triangle se trouve sur les lignes qui joignent les sommets aux milieux des bases correspondantes, ou bien sur l'une d'elles au tiers à partir de la base, que le centre de gravité d'une courbe du deuxième degré est à son centre*, etc.

98. En appliquant les mêmes raisonnements aux volumes, on trouve pour une branche de volume faite par deux plans perpendiculaires à l'axe des x :

$$\xi = x \pm \varepsilon, \quad \eta = \frac{\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \rho y \, dz dy}{\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \rho \, dz dy}, \quad \zeta = \frac{\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \rho z \, dz dy}{\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \rho \, dz dy}.$$

Fig. 30. Ainsi, le centre de gravité d'une tranche de volume projetée, par exemple, sur *pmnq* est le même que celui de la section faite par le plan qui a pour trace *pm* ou la section limite de la tranche ; d'où il résulte que lorsque toutes ces sections ont leurs centres de gravité sur une même droite, le centre de gravité du volume s'y trouve aussi.

99. On conclut de là que, *le centre de gravité d'une pyramide triangulaire se trouve sur chacune des lignes qui joignent les sommets aux centres de gravité des bases correspondantes, ou sur l'une d'elles au quart à partir de la base; que le centre de gravité d'une surface du deuxième degré est à son centre*, etc.

§ VII.

Théorème de Guldin.

100. s désignant la longueur d'un arc de courbe, et η l'ordonnée de son centre de gravité, nous avons trouvé

$$s.\eta = \int_{x_0}^{X} y \sec.\theta\, dx,$$

multipliant les deux membres par 2π, il vient

$$s\times 2\pi\eta = 2\pi\int_{x_0}^{X} y \sec.\theta\, dx = 2\pi\int_{x_0}^{X} N dx.$$

Le deuxième membre de cette égalité est l'expression d'une surface de révolution autour de l'axe des x, tandis que $2\pi\eta$ est la circonférence décrite par le centre de gravité de la courbe donnée. Donc *une surface quelconque de révolution est égale à la courbe génératrice multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

D'après cela, connaissant deux de ces trois choses, savoir : la longueur de la génératrice, l'ordonnée de son centre de gravité et l'expression de la surface engendrée, on en déduira facilement la troisième.

101. Supposons que la courbe génératrice soit l'arc AB, la surface engendrée a pour mesure Fig. 31

$$2\pi r\times pq = 2\pi r\times c\ (c = AB):$$

on a donc

$$2\pi r \times c = 2\pi\eta \times s \quad \text{ou} \quad \eta = \frac{cr}{s}\,;$$

ainsi *le centre de gravité d'un arc de cercle, est sur le rayon qui le divise en deux parties égales, à une distance du centre quatrième proportionnelle à l'arc, à sa corde et au rayon.*

Fig. 32. **102.** De même le contour d'une branche de cycloïde étant égal à $8r$ et la surface engendrée à $\frac{64}{3}\pi r^2$, nous avons

$$\frac{64}{3}\pi r^2 = 2\pi\eta \times 8r \quad \text{ou} \quad \eta = \frac{4}{3}r,$$

donc le centre *de gravité du contour d'une branche de cycloïde est sur la ligne qui la divise en deux parties égales, à une distance du développement du cercle générateur égale aux* $\frac{4}{3}$ *du rayon du cercle.*

103. On peut appliquer la même formule à la surface de l'ellipsoïde de révolution, et en déduire le centre de gravité d'une demi-ellipse.

104. A désignant une surface plane, et η l'ordonnée de son centre de gravité, nous avons trouvé

$$A\eta = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} y\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{X}(Y^2 - y_0^2)\,dx,$$

multipliant par 2π de part et d'autre, il vient,

$$A.2\pi\eta = \int_{x_0}^{X}\pi Y^2 dx - \int_{x_0}^{X}\pi y_0^2.\,dx\,;$$

or, le deuxième membre représente évidemment la différence des volumes de révolution engendrée par les sur-

faces planes comprises entre l'axe des x, les ordonnées extrêmes et les deux courbes qui terminent la surface génératrice : donc *un solide quelconque de révolution est égal à la surface génératrice multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

105. Le triangle oAB tournant autour de oX, engendre un volume égal à $\frac{h}{3}$ multiplié par la surface décrite par AB, ou à Fig. 33.

$$\frac{h}{3}.\pi y b \quad (0C = h,\ AB = b),$$

on a donc.

$$\frac{h}{3}\pi y b = 2\pi\eta.\frac{bh}{2},$$

d'où

$$\eta = \frac{y}{3}$$

résultat connu pour le centre de gravité du triangle. Si le triangle générateur était dans la position (2), on aurait pour la valeur engendrée, le produit de $\frac{h}{3}$ par la surface décrite par sa base, qui est une surface de tronc de cône et égale à $\frac{b}{2}$, multipliée par la demi-somme des circonférences dont les rayons sont y et y_1, en sorte que l'on a

$$\frac{bh}{3}\pi\left(\frac{y+y_1}{2}\right) = \pi\eta.bh,$$

d'où

$$\eta = \frac{y+y_1}{3},$$

résultat encore connu.

106. De même, le volume d'un ellipsoïde de révolution étant $\frac{4}{3}\pi\, ab^2$, et la surface de la demi-ellipse génératrice étant $\pi\,\frac{ab}{2}$, on a

$$\frac{4}{3}\pi ab^2 = \pi ab \times \pi\eta,$$

d'où

$$\eta = \frac{4}{3}\frac{b}{\pi}$$

pour le centre de gravité de l'aire de la demi-ellipse.

Fig. 34. **107.** Le volume engendré par le secteur circulaire *aob* est égal à la surface de la zône multipliée par le tiers du rayon, c'est-à-dire à

$$\frac{r}{3}\times 2\pi r.c \quad \text{ou} \quad \frac{r}{3}\pi r^2 c,$$

de plus la surface du secteur circulaire $=$ arc. $ab.\ \frac{r}{2}$, on a donc

$$\frac{2}{3}\pi r^2 c = \text{arc.}\, ab \times \frac{r}{2} \times 2\pi\eta,$$

d'où

$$\eta = \frac{2}{3}\frac{rc}{\text{arc.}\, ab},$$

donc *le centre de gravité d'un secteur circulaire est sur le rayon qui le divise en deux parties égales à une distance du centre égale aux deux tiers de celle du centre de gravité de l'arc correspondant.* On peut arriver à ce résultat en considérant le secteur comme formé par la réunion de triangles.

108. Le volume engendré par le cycloïde, étant $5\pi^2 r^3$ et sa surface $3\pi r^2$, on a

$$5\pi^2 r^3 = 3\pi r^2 \times 2\pi n$$

d'où

$$n = \frac{5}{6} r,$$

résultat très-remarquable pour le centre de gravité de l'aire de la cycloïde.

109. On trouverait pour le centre de gravité de l'aire de la partie supérieure d'une demi-lemnicaste $n = \frac{1}{5}\frac{a}{\pi}$

110. Nous avons supposé dans la génération, que chaque point décrit une circonférence entière, on en déduit sans difficulté que les théorèmes précédents subsistent quel que soit l'espace parcouru par le centre de gravité de la génératrice.

CHAPITRE V.

CALCUL DE L'ATTRACTION DES CORPS SPHÉRIQUES.

111. Il est nécessaire avant tout d'établir les relations qui existent entre les coordonnées polaires et rectangulaires.

Soit r le rayon recteur pour un point A, de l'espace Fig. 35
par rapport au pôle o pris pour origine des coordonnées : si on nomme p l'angle du rayon recteur avec l'axe des x, on aura

$$x = r \cos. p :$$

du point A, abaisssons AM perpendiculaire à l'axe des x et AP perpendiculaire au plan des xy, et joignons PM : on a évidemment

$$AM = y = r \sin. p :$$

de plus, si on désigne par q l'angle des plans AoM et YoX, cet angle sera mesuré par AMP, ainsi

$$Ap = z = AM \sin. q = r \sin. p \sin. q$$

et

$$y = r \sin. p \cos. q :$$

telles sont les relations que nous cherchions.

112. Pour aborder le cas le plus général, nous considérerons le volume compris entre deux sphères, deux cônes concentriques, et deux plans passant par l'axe des cônes, et nous commencerons par chercher l'expression d'un pareil volume.

Fig. 36. Prenons l'axe des x pour axe des cônes, et supposons d'abord qu'il s'agit d'une seule sphère, ayant son centre à l'origine des coordonnées, dont l'équation sera $r = R$, et d'un cône unique dont l'équation sera $p = P$: dans ce cas le volume dont il s'agit, sera une section sphérique ayant pour mesure la surface de la zône qui lui sert de base multipliée par le tiers du rayon : or, la surface de cette zône est égale à

$$2\pi R \times MN$$

ou bien

$$2\pi R \times R(1 - \cos. P) = 2\pi R^2(1 - \cos. P),$$

puisque

$$MN = R(1 - \cos. P),$$

et par suite, on a pour le volume V du secteur

$$V = \frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \cos. P) :$$

de même le volume compris entre la même sphère et le cône $p=p_o$, serait

$$\frac{2}{3}\pi R^3(1-\cos.p_o),$$

et par suite, le volume compris entre la sphère et les deux cônes sera

$$\frac{2}{3}\pi R^3(\cos.p_o-\cos.P):$$

par la même raison, le volume compris entre les deux mêmes cônes et une seconde sphère, ayant pour équation $r=r_o$, sera

$$\frac{2}{3}\pi r_o^3(\cos.p_o-\cos.P):$$

par conséquent, le volume compris entre les deux sphères et les deux cônes, aura pour expression

$$\frac{2}{3}\pi(R^3-r_o^3)(\cos.p_o-\cos.P):$$

enfin, si l'on veut avoir la portion de ce volume compris entre deux plans passant par l'axe des x, ayant pour équation $p=q, p=q_o$, il suffira de remarquer que dans un volume de révolution, une portion comprise entre deux plans faisant un angle α, est au volume total dans le rapport de α à la circonférence entière, ou de α à 2π, donc le volume cherché aura pour valeur

$$\frac{1}{3}(R^3-r_o^3)(\cos.p_o-\cos.P)(Q-q_o).$$

113. Si r_o, p_o, q_o devenaient nuls, auquel cas on aurait le volume compris entre une sphère, un cône,

le plan des x, y et un autre plan passant par l'axe des x, la valeur précédente se réduirait à

$$\frac{1}{3} R^3 (1 - \cos. P) Q$$

114. Maintenant, il s'agit de déterminer la masse du volume que nous venons d'évaluer, ou en termes plus généraux, la limite de la somme du produit de chaque élément multiplié par la valeur de sa densité.

Nous pouvons considérer les six quantités R,P,Q, r_0, p_0, q_0 comme étant les coordonnées des deux sommets du volume, et regarder le sommet R,P,Q comme mobile; nous représenterons ses coordonnées variables par r, p, q, et nous appellerons ρ la densité en un point quelconque du volume, ou mieux, nous désignerons par u une fonction susceptible de prendre diverses valeurs en chaque point du volume, et nous chercherons la limite de la somme du produit des éléments par les valeurs de u correspondantes : soit $\psi(p,q,r)$ cette limite : faisons varier successivement les trois coordonnées p,q,r, cette somme prendra un accroissement

$$\Delta_p \Delta_q \Delta_r \psi(p, q, r),$$

le volume lui-même prendra un accroissement que nous pourrons considérer comme un élément, en le multipliant par la fonction u, nous aurons l'accroissement de $\psi(p,q,r)$, et par suite l'égalité

$$\Delta_p \Delta_q \Delta_r \psi(p, q, r) = [(u \pm \varepsilon) \Delta_p \Delta_q \Delta_r \mathrm{F}(p, q, r)],$$

d'où

$$\frac{\Delta_p \Delta_q \Delta_r \psi(p, q, r)}{\Delta_p \Delta_q \Delta_r} = \frac{u[\Delta_p \Delta_q \Delta_r \mathrm{F}(p, q, r)}{\Delta_p \Delta_q \Delta_r},$$

ou bien

$$\frac{d^3\psi(p, q, r)}{drdpdq} = \frac{ud^3\mathrm{F}(p, q, r)}{drdpdq};$$

or, dans le cas le plus simple, c'est-à-dire celui où il s'agit du volume compris entre une sphère, un cône et deux plans, on a

$$F(p,q,r)=\frac{1}{3}QR^3(1-\cos.P):$$

ainsi

$$\frac{d^3F(p,q,r)}{drdpdq}=r^2\sin.p,$$

et par suite

$$\frac{d^3\psi(p,q,r)}{drdpdq}=ur^2\sin.p:$$

intégrant cette expression et observant que le volume sera nul pour $p_0=0$, quels que soient q et r, pour $q_0=0$ quels que soient p et r, et pour $r_0=o$, quels que soient p et q; on aura

$$\psi(p,q,r)=\int_{r_0}^{R}\int_{p_0}^{P}\int_{q_0}^{Q}ur^2\sin.pdqdpdr.$$

115. Dans le cas où le volume est compris entre deux sphères, deux cônes et deux plans, ce volume aura même différentielle que celui que nous venons de considérer, car ces deux volumes ne diffèrent que par une quantité constante : donc on aura encore pour le cas le plus général

$$\psi(p,q,r)=\int_{r_0}^{R}\int_{p_0}^{P}\int_{q_0}^{Q}ur^2\sin.pdqdpdr.$$

116. Si on suppose que u soit la densité, et soit une quantité ρ, constante pour un même élément du corps, alors en représentant la masse par M, on aura :

$$M=\int_{r_0}^{R}\int_{p_0}^{P}\int_{q_0}^{Q}\rho r^2\sin.pdqdpdr.$$

Fig. 37. **117**. Cela posé, nous allons chercher l'attraction du volume que nous avons déterminé, sur un point matériel ou réciproquement, car l'action est toujours égale et contraire à la répulsion.

Nous supposons que le point donné P, est situé sur l'axe des x, ce qui n'ôte rien à la généralité de la question ; nous admettrons d'ailleurs, que l'attraction que deux masses élémentaires ont l'une sur l'autre, est proportionnelle à leur masse et inversement proportionnelle au carré de leur distance ; soit A un point du volume, v son volume élémentaire et m sa masse : cette dernière exercera sur le point P une attraction proportionnelle à la masse : ainsi si on appelle k l'attraction exercée par le point P sur l'unité de masse à l'unité de distance, et s la distance AP, l'attraction du point P sur l'élément de masse sera $\frac{Km}{s^2}$: si on suppose que deux points situés symétriquement de chaque côté de l'axe des x, dans un plan passant par cet axe, ont la même densité, toutes ces attractions parallèles auront une résultante unique dirigée suivant cet axe : elle sera donc égale à la somme des projections des différentes forces ou attractions sur cet axe. Or, ces projections seront représentées par

$$\frac{Km}{s^2}\cos \text{APO},$$

ou bien

$$\frac{Km}{s^2}\times\frac{vP}{AP}=\frac{Km}{s^2}\left(\frac{a-r\cos. p}{s}\right)=\frac{Km(a-r\cos p)}{s^3}=$$
$$=K\left(\frac{a-r\cos. p}{s^3}\right)v(\rho\pm\varepsilon),$$

ε étant une quantité très-petite ; la somme de toutes ces attractions sera d'après ce qui précède

$$F=K\int_{r_0}^{R}\int_{p_0}^{P}\int_{q_0}^{Q}\frac{a-r\cos.p}{s^3}\,\rho r^2\sin.p\,dq\,dp\,dr.$$

Si nous supposons de plus, que ρ soit indépendant de q, c'est-à-dire reste constant sur une même circonférence perpendiculaire à l'axe des x, alors

$$q_0=0,\qquad Q=2\pi,$$

et par suite :

$$F=2\pi K\int_{r_0}^{R}\int_{p_0}^{P}\frac{a-r\cos.p}{s^3}\,\rho r^2\sin.p\,dp\,dr$$

si nous admettons maintenant que ρ est constant sur une même surface sphérique, cette quantité sera indépendante de p, et nous aurons

$$F=2K\pi\int_{r_0}^{R}\rho\int_{p_0}^{P}\frac{a-r\cos p}{s^3}\,r^2\sin.p\,dp\,dr:$$

pour calculer cette intégrale par rapport à p, remplaçons cette variable par la variable s : or, il est évident que

$$s^2=a^2-2ar\cos.p+r^2,$$

d'où l'on tire

$$sds=ar\sin.p\,dp$$

ou

$$r^2\sin.p\,dp=\frac{r}{a}\,sds,$$

substituant il vient

$$F=2K\pi\int_{r_0}^{R}\rho\,\frac{r}{a}\int_{s_0}^{S}\frac{a-r\cos.p}{s^2}\,ds\,dr,$$

S et s_0 étant les valeurs de s correspondantes à P et p_0, or de

$$s^2=a^2-2ar\cos.p+r^2,$$

on déduit

$$s^2+a^2-r^2=2a^2-ar\cos.p=2a(a-r\cos.p)$$

ou

$$a-r\cos.p=\frac{s^2+a^2-r^2}{2a},$$

ainsi

$$F=2K\pi\int_{r_0}^{R}\frac{\rho r}{2a^2}\int_{s_0}^{S}\left[1+\frac{(a^2-r^2)}{s^2}\right]dsdr$$

et en intégrant par rapport à s,

$$F=\frac{K\pi}{a^2}\int_{r_0}^{R}\rho r\left[(S-s_0)+(a^2-r^2)\left(\frac{1}{s_0}-\frac{1}{S}\right)\right]dr:$$

remplaçons maintenant S et s_0 par leurs valeurs : pour cela, observons que si nous supposons que les deux génératrices des cônes se confondent l'une avec l'axe des x, l'autre avec son prolongement, alors $p_0=o$ et $P=\pi$, et comme on a d'ailleurs

$$S^2=a^2-ar\cos.P+r^2,\quad s_0{}^2=a^2-2ar\cos.p_0+r^2,$$

on en conclut

$$S^2=(a+r)^2,\quad s_0{}^2=(a-r)^2$$

et selon que a sera plus grand ou plus petit que r, il faudra prendre la valeur positive ou négative de s_0. Le premier cas, c'est-à-dire, quand le point P est intérieur au volume, $S=a+r$, $s_0=a-r$ et la quantité à intégrer se réduit à

$$\rho r\left[2r(a^2-r^2)\left(\frac{1}{a-r}-\frac{1}{a+r}\right)\right]=4\rho r^2,$$

et par conséquent

$$F=\frac{4\pi K}{a^2}\int_{r_0}^{R}\rho r^2dr;$$

pour interpréter ce résultat, observons que si dans l'expression de la masse nous introduisons toutes nos suppositions, c'est-à-dire si nous la réduisons à la masse du volume compris entre deux sphères, on a

$$M = 4\pi \int_{r_0}^{R} \rho r^2 dr \quad \text{donc} \quad F = \frac{KM}{a^2};$$

donc l'attraction de ce volume sur un point extérieur ou réciproquement, est exactement la même que si cette masse était concentrée au centre des sphères. Dans le deuxième cas, si $a < r$, c'est-à-dire si le point est intérieur, alors

$$S = a + r, \quad s_0 = -(a - r) = r - a,$$

et la quantité sous le signe $\int$ devient nulle, donc, alors $F = 0$: ainsi une pareille masse n'a aucune action sur un point intérieur à la plus petite des deux sphères : donc aussi, si le point est dans l'intérieur même de la masse et qu'on fasse passer une sphère concentrique par ce point, la partie qui lui sera extérieure, ne produira aucun effet, l'autre seule exercera un effet dont nous savons trouver la mesure.

118. Il résulte de là que l'attraction d'une sphère sur une autre est la même que si la masse de chaque sphère était réunie à son centre. Concluons donc

119. 1° *Que les attractions en raison inverse du carré des distances, exercées par tous les points d'une couche sphérique, d'une épaisseur constante homogène, sur un point situé dans l'espace vide terminé par cette couche, se détruisent mutuellement ; en sorte que ce point demeure en équilibre quelle que soit sa position.*

120. 2° *Que l'attraction de cette couche ou d'une sphère entière exercée sur un point extérieur, est la même que si la masse du corps attirant était réunie à son centre.*

121. 3° *Si le point fait partie de la couche attirante, et si l'on fait passer une sphère concentrique par ce point, le point sera attiré par la masse extérieure à cette nouvelle couche, comme il est dit au n° 1, et la partie extérieure se comportera comme il est dit au n° 2.*

122. Si nous supposons que la densité est partout la même, alors $F = \frac{KV\rho}{a^2}$, V étant le volume correspondant à la masse M, ainsi, si le volume considéré se réduit à celui d'une sphère dont le rayon est r, il vient pour l'attraction

$$F = \rho K \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^2},$$

si le point attiré lui est intérieur, l'attraction ne s'exerce plus qu'en vertu de la sphère ayant pour rayon a, ainsi dans ce cas

$$F = \rho K \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{a^2} = \rho K \cdot \frac{4}{3}\pi a,$$

on conclut de là, que dans ce cas l'*attraction est proportionnelle à la distance* : c'est ce qui a lieu pour l'attraction de la terre : tant que ce point est dans l'atmosphère, il attire en raison inverse du carré de la distance au centre de la terre, mais dès qu'il a pénétré dans la terre, par exemple, dans un puits,

l'attraction est proportionnelle à sa distance au centre.

Nous allons terminer ce chapitre par quelques notions, qui compléteront ce qui est relatif aux attractions.

123. Les corps renferment, sous des volumes égaux, des quantités inégales de matière pondérable, et ces quantités varient dans un même corps, par la température et la pression. On considère les corps comme composés de parties matérielles non contiguës, telles que les dimensions et celles du vide qui les sépare, échappent à l'œil par leur petitesse : ces parties se nomment *atomes* et le vide qui les sépare *pores*. On regarde comme invariables leur masse, leur forme et leur volume, les pores peuvent éprouver de grandes variations par les effets de la température ou de la pression.

124. Les molécules des corps ne sont autre chose que la réunion également insensible de plusieurs atomes, les corps diffèrent par la nature et la proportion des atomes, qui entrent dans la composition de leurs molécules.

125. Ainsi, c'est à tort qu'on suppose la masse divisée en éléments infiniments petits, ayant la même densité dans les corps homogènes, ou une densité qui varie par degré insensible dans les corps hétérogènes : néanmoins on peut faire usage des formules fondées snr cette considération, même lorsque les corps ont été divisés en parties d'une grandeur fixe, mais tout à fait insensible, car une partie de la masse qui renferme un grand nombre de molécules, peut encore être considérée comme très-petite.

126. D'après cela, si on veut avoir la masse d'un corps, ou plus généralement la somme des produits de ses parties élémentaires par une fonction des coordonnées de l'un de ses points, il faudra diviser le volume en parties très-petites, multiplier chacune d'elles par la densité de son centre de gravité et par la fonction ci-dessus, et faire la somme de tous ces produits à la limite, cette somme ne sera autre chose que l'intégrale de la même quantité, et elle s'en rapprochera à mesure que les parties deviendront de plus en plus petites, en sorte que le volume élémentaire v étant très-petit, mais différent de dv, on pourra, sans erreur sensible, substituer l'intégrale à la somme : c'est précisément ce que nous avons fait.

L'erreur ne serait sensible que dans le cas où la fonction varie très-rapidement, et change de signe dans l'intégration, mais cette exception n'a aucun rapport avec le cas que nous avons considéré.

CHAPITRE VI.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS FLEXIBLE.

§ Ier.

Équilibre du polygone funiculaire.

127 On appelle *machine funiculaire* tout assemblage de cordes liées entre elles par des nœuds fixes ou passées dans des anneaux qui peuvent glisser le long de ces cordes, mais nous supposerons qu'il n'y a

jamais plus de trois cordons réunis en un même point.

Considérons d'abord une suite de cordes ou de droites invariables qui peuvent tourner librement autour du point d'application.

128. On fait abstraction des masses, et, par conséquent, du poids des cordes ; d'ailleurs chacun de ces poids serait une force que l'on décomposerait en deux autres parallèles appliquées aux extrémités de chaque corde. Ainsi, nous supposons que le système est seulement sollicité par des forces P, P', P'' etc., appliquées aux divers sommets du *polygone funiculaire :* nous supposons en outre les côtés AB, BC inflexibles et inextensibles, les sommets A, B, C variables de position, et les angles du polygone variables de grandeur : il s'agit de déterminer les conditions d'équilibre. Soient α, β, γ, α', β', γ', etc., les angles des forces P, P', P'' etc., avec les axes et xyz, $x'y'z'$ etc., les coordonnées des sommets du polygone : le polygone étant en équilibre quand les sommets sont variables de position, cet équilibre ne sera pas troublé, en supposant que les sommets soient fixes, c'est-à-dire que les angles soient invariables, et les forces qui, alors, sont appliquées à un système invariable, seront en équilibre si la force principale et le moment principal sont nuls séparément et simultanément; on aura donc déjà pour conditions nécessaires de l'equilibre Fig. 38.

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0, \quad L=0; \quad M=0, \quad N=0,$$

ou bien

$$P \cos.\alpha + P' \cos.\alpha' + \text{etc.} \ldots\ldots + P^n \cos.\alpha^n = 0$$
$$P \cos.\beta + P' \cos.\beta' + \ldots\ldots\ldots\ldots + P^n \cos.\beta^n = 0$$
$$P \cos.\gamma + P' \cos.\gamma' + \ldots\ldots\ldots\ldots + P^n \cos.\gamma^n = 0$$
$$P(y \cos.\gamma - z \cos.\beta) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P^n(y^n \cos.\gamma^n - z^n \cos.\beta^n) = 0$$
$$P(z \cos.\alpha - x \cos.\gamma) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P^n(z^n \cos.\alpha^n - x^n \cos.\gamma^n) = 0$$
$$P(x \cos.\beta - y \cos.\alpha) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P^n(x^n \cos.\beta^n - y^n \cos.\alpha^n) = 0.$$

129. Ces conditions seraient suffisantes si les angles du polygone étaient invariables (ce qu'on exprimerait en établissant que chaque sommet est lié par des cordes invariables, non-seulement avec les deux sommets adjacents, mais encore avec tous les autres); mais si les angles sont variables, il faut de nouvelles conditions : supposons d'abord que le sommet A soit seul variable, et que les autres restent fixes; il faudra pour l'équilibre que la force P soit dirigée suivant le côté AB, car il faut que cette force maintienne ce côté en équilibre, ce qui s'exprimera en écrivant que les projections de la force sont proportionnelles à celle du côté, ce qui donne

$$\frac{P\cos.\alpha}{x'-x}=\frac{P\cos.\beta}{y'-y}=\frac{P\cos.\gamma}{z'-z};$$

on pourrait même, dans ce cas, supprimer le facteur commun P; cette condition étant remplie, la force P sera dirigée suivant le côté AB, et pourra être transportée en B, où elle se composera avec P' en une seule force ayant pour projection sur les axes

$$P\cos.\alpha+P'\cos.\alpha',\quad P\cos.\beta+P'\cos.\beta',\quad P\cos.\gamma+P'\cos.\gamma':$$

si maintenant on suppose que le point B devienne mobile, les autres C,D,E restant fixes, il faudra pour l'équilibre, outre les conditions établies, que la résultante soit dirigée suivant la corde BC, ou que les projections soient proportionnelles à celles de la corde, et on aura

$$\frac{P\cos.\alpha+P'\cos.\alpha'}{x''-x'}=\frac{P\cos.\beta+P'\cos.\beta'}{y''-y'}=\frac{P\cos.\gamma+P'\cos.\gamma'}{z''-z'};$$

cette condition étant remplie, la résultante pourra

être transportée en C, où elle se composera avec la force P″ et produira une nouvelle résultante. En continuant ces raisonnements pour tous les côtés du polygone, on arrivera enfin à une résultante qui sera dirigée suivant EF, et appliquée au point F supposé mobile : il faudra pour l'équilibre que cette résultante et la force P appliquée en F se fassent équilibre : ainsi, pour dernière condition d'équilibre, il sera nécessaire que toutes les forces transportées parallèlement à elles-mêmes en F se fassent équilibre, et c'est ce qu'expriment déjà les trois conditions qui donnent une force principale nulle.

130. Nous disons en outre, que si ces trois conditions sont satisfaites, ainsi que toutes celles que nous avons énoncées plus haut, il y aura équilibre. En effet, supposons que le polygone funiculaire soit maintenant tel qu'il a été donné, c'est-à-dire, ayant ses angles variables et ses côtés inextensibles : si la première condition

$$\frac{P\cos.\alpha}{x'-x}=\frac{P\cos.\beta}{y'-y}=\frac{P\cos.\gamma}{z'-z}$$

est satisfaite, la force P sera dirigée suivant AB, et pourra être transportée en B où elle se composera avec P′ et donnera une résultante qui, en vertu de la deuxième condition, sera dirigée suivant BC, et ainsi de suite ; enfin, on arrivera à avoir remplacé le système entier du polygone par un système de forces appliquées au point F, et ces forces ne seront autre chose que les forces données, transportées parallèlement à elles-mêmes. Or, ces forces seront en équilibre en vertu des trois dernières conditions : donc il y aura équilibre, et les conditions trouvées sont nécessairement suffisantes.

Remarquons qu'on peut dans le cas d'équilibre considérer un côté quelconque et concentrer aux deux extrémités les forces appliquées aux sommets qui suivent ou qui précèdent; ces deux forces appliquées aux deux extrémités du côté, doivent être égales et directement opposées, car elles doivent se faire équilibre. Chacune de ces forces mesure la tension du côté, et cette tension peut être considérée comme agissant dans la direction de ce fil dans un sens et dans un autre.

Examinant le nombre total des équations d'équilibre, nous avons trouvé autant de formules d'équilibre qu'il y a de côtés, c'est-à-dire n formules, et comme chacune d'elles renferme deux équations, il y aura $2n$ équations d'équilibre auxquelles il faut ajouter les trois équations qui expriment que la force principale est nulle ; ainsi le nombre total est $2n+3$.

Puisque les $2n+3$ équations qui précèdent suffisaient pour établir l'équilibre, il est évident qu'elles doivent renfermer les trois conditions qui expriment la nullité du mouvement principal : c'est ce que l'on peut vérifier. En effet, des formules d'équilibre on déduit

$$\mathrm{P}\cos.\beta(z'-z)=\mathrm{P}\cos.\gamma(y'-y)$$
$$(\mathrm{P}\cos.\beta+\mathrm{P}'\cos\beta')(z''-z')=(\mathrm{P}\cos.\gamma+\mathrm{P}'\cos.\gamma')(y''-y')$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\mathrm{P}\cos.\beta+\ldots\ldots+\mathrm{P}^{n-1}\cos\beta^{n-1})(z^n-z^{n-1})$$
$$=(\mathrm{P}\cos.\gamma+\ldots\ldots+\mathrm{P}^{n-1}\cos.\gamma^{n-1})(y^n-y^{n-1}),$$

ajoutant toutes ces équations membre à membre, il viendra pour le premier membre en faisant les réductions

$$-\mathrm{P}z\cos.\beta-\mathrm{P}'z'\cos.\beta'\ldots\ldots\ldots-\mathrm{P}^{n-1}z^{n-1}\cos.\beta^{n-1}$$
$$+(\mathrm{P}\cos\beta+\ldots\ldots+\mathrm{P}^{n-1}\cos.\beta^{n-1})z^n$$

or, puisque la force principale est nulle, on a

$$P\cos.\beta+P'\cos.\beta'+\ldots\ldots+P^{n-1}\cos.\beta^{n-1}=-P^n\cos.\beta^n,$$

ainsi le premier membre devient

$$-Pz\cos.\beta-P'z'\cos.\beta'\ldots\ldots-P^{n-1}z^{n-1}\cos.\beta^{n-1}-P^nz^n\cos.\beta^n,$$

on aura de même pour le deuxième membre

$$-Py\cos\gamma-P'y'\cos.\gamma'\ldots\ldots-P^{n-1}y^{n-1}\cos,\gamma^{n-1}-P^ny^n\cos.\gamma^n.$$

ces deux expressions sont égales et forment une équation qui, en faisant passer le deuxième membre dans le premier, et groupant les termes deux à deux, se réduit à

$$P(y\cos.\gamma-z\cos.\beta)+P'(\ldots\ldots\ldots)+\ldots\ldots \\ +P^n(y^n\cos.\gamma^n-z^n\cos.\beta^n)=0$$

équation identique avec l'une de celles qui établissent la nullité du moment principal. On retrouverait de même les deux autres : on voit donc que les équations d'équilibre emportent la nullité du moment principal.

131. On peut voir que le nombre des équations d'équations d'équilibre est égal à celui des variables indépendantes ; en effet, nous savons que les sommets du polygone doivent être constamment à la même distance des sommets adjacents ou en d'autres termes, que les longueurs des côtés du polygogne restent invariables, on a par conséquent, pour chaque côté, une équation de la forme

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=a$$
$$(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2=a'$$
etc., etc.

Le nombre de ces équations est égal au nombre n des côtés : ainsi voilà n équations qui peuvent servir à dé-

terminer les valeurs de $xyz, x'y'z'$ etc. inconnues qui sont au nombre de $3n+3$: d'après cela, il n'y aura que $2n+3$, variables qui soient indépendantes ; donc leur nombre est égal à celui des conditions d'équilibre.

Si tout le système se trouvait dans le même plan, il est évident qu'alors le nombre des équations se réduit à $n+2$, puisque les n premières formules, en donnent une chacune et la dernière deux : $n+2$ est d'ailleurs le nombre des variables indépendantes.

Enfin, si le système étant quelconque, les deux points extrêmes étaient fixes, les deux forces extrêmes ne seraient plus à déterminer en grandeur et en direction, ainsi, dans ce cas, le nombre d'équations serait $2n-3$, ainsi que le nombre des variables indépendantes, et il se réduirait à $n-1$, si le système était dans un même plan.

132 Si les directions des forces partagent toujours en deux parties égales, l'angle compris entre les deux côtés adjacents, la tension T est nécessairement constante dans toute l'étendue du polygone : de plus, en nommant a^m l'angle compris entre les deux côtés adjacents au point d'application de la force P^m, on aura la relation $P^m = 2T\cos\frac{a^m}{2}$ qui doit subsister pour toutes les valeurs de m.

133. Si les directions des forces sont toutes parallèles entre elles, l'équilibre ne pourra évidemment subsister qu'autant que les directions de toutes les forces et tous les côtés du polygone seront compris dans un même plan.

Si en outre, ces forces sont toutes verticales, il est facile de conclure que s'il existe dans le polygone un côté horizontal, la tangente de l'angle d'inclinaison

des côtés du polygone sur l'horizon, augmentera à partir de celui-ci, proportionnellement à la somme des forces comprises entre le côté horizontal et celui que l'on considère ; on verra de même que les composantes horizontales des tensions des côtés extrêmes du polygone, doivent être égales entre elles, que la somme des composantes verticales de ces tensions doit être égale à la somme des forces verticales appliquées au fil, et que de plus, s'il existe un côté horizontal dans le polygone, les composantes verticales des tensions des côtés extrêmes seront respectivement égales à la somme des forces verticales comprises entre ce côté et l'extrémité correspondante du fil.

134. Considérons maintenant le cas où les points d'application peuvent glisser librement le long du fil ou polygone funiculaire.

C'est le cas d'un cordon inextensible fixé à ses deux extrémités et enfilé dans une série d'anneaux. Supposons d'abord qu'il n'y a qu'un seul point mobile sur le cordon. La force P est la résultante des forces qui lui sont appliquées. Le point B ne pourra se mouvoir que sur la surface d'un ellipsoïde de révolution dont les deux points A et C sont les foyers, et dont le grand axe est égal à la longueur du cordon ACB. Pour que le point B soit en repos sur cette surface, il faut que la force qui le sollicite soit normale à l'ellipsoïde, ou que la direction de la force divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs, ou ABC, ou bien encore que la force P soit décomposable en deux autres dirigées suivant les cordons AB, BC. Si A et C étaient mobiles, il faudrait en outre que ces points fussent retenus par des forces égales et opposées directement aux composantes de la force P. Fig. 38.

Fig. 38. S'il y avait plusieurs anneaux mobiles et une force appliquée à chacun d'eux, il suffirait pour l'équilibre que chacun de ces points remplît les conditions énoncées dans le premier cas. Ainsi, si nous considérons en particulier le point D et les cordons voisins CD, DE, il faudra que la force P''' qui sollicite ce point, soit décomposable suivant DE et DC en deux forces égales aux composantes de P'' et P^{iv} suivant ces mêmes cordons et dirigées en sens contraires. Cette force P''' devant de plus être normale à l'ellipsoïde qui aurait pour grand axe CD+DE, il faudra que la direction de P''' divise en deux parties égales l'angle du polygogne en D : il en sera de même de tout autre sommet : ainsi, les conditions d'équilibre sont les mêmes que dans le cas d'un point mobile et d'une force unique.

135. Considérons la force P qui retient le point A et la composante de P' suivant AB; puisque, par hypothèse, le polygone funiculaire est en équilibre, on peut lui substituer un polygone dont les côtés sont invariables : or, on sait que dans ce cas la force P doit coïncider en direction avec AB, et être égale et directement opposée à la composante de P', suivant AB, ce qui fournit deux équations d'équilibre; on aura de même, pour chacune des forces P', P'', et ainsi de suite; la force P_n combinée avec la résultante de toutes les autres donnera aussi deux équations, on aura donc autant de fois deux équations qu'il y aura de côtés, plus un, ou bien $2n+2$ équations : pour exprimer en outre que chaque force divise en deux parties égales l'angle du sommet du polygone auquel elle est appliquée, on aura

$$P' . T :: \sin. \alpha : \sin. \frac{\alpha}{2},\ P'' : T :: \sin. \alpha' : \sin. \frac{\alpha'}{2}$$

$$P^{n-1} : T :: \sin. \alpha^{n-1} : \sin. \frac{\alpha^{n-1}}{2}$$

ces proportions qui seront au nombre de $n-1$ donneront, en les ajoutant aux $2n+2$ ci-dessus, et en y joignant l'équation $P^n=T$, $2n+2n-1+1$ équations, ou $3n+2$ équations d'équilibre : maintenant, pour exprimer que le fil est inextensible, on aura une équation de condition qui nous permettra d'éliminer une des variables qui sont au nombre de $3n+3$ ainsi, il ne restera que $3n+2$ variables indépendantes : donc le nombre des variables indépendantes est égal à celui des équations d'équilibre.

§ II.

Equilibre d'un fil flexible, ou courbe funiculaire.

136. Considérons d'abord un fil pesant homogène, parfaitement flexible et attaché par ses extrémités à deux points fixes. Ce fil, abandonné à l'action de la pesanteur, affectera dans l'état d'équilibre une certaine courbe qu'on nomme *chaînette*, et dont il s'agit de déterminer l'équation. Fig. 39.

Soit A,B les points fixes, C le point le plus bas de la courbe, et D un point quelconque pris sur cette courbe : quant l'équilibre existe, l'arc CD est dans le même cas que s'il était fixe : soit s la longueur de cet arc, ρ la densité constante de la masse concentrée sur l'arc CD, ρs représente cette masse et $g\rho s$ le poids de cet arc : ce poids agit en un point G qui en est le centre de gravité et qu'on doit supposer lié invariablement à tous les points de l'arc. Puisqu'il y a équilibre, nous pouvons admettre pour un instant que l'arc CD est entièrement fixe, les autres portions de la courbe restant flexibles. Si on vient à séparer cet arc CD, il tombera ; alors les points C et D étant fixes et les arcs

AC et DB étant en équilibre, pour les retenir il faudra appliquer aux points C et D des forces convenables : l'arc flexible AC devant retenir le point C, agira sur ce point comme une force tangente en C à la courbe, car cette force qui représente la tension doit être dirigée suivant l'élément de la courbe au point C ou suivant la tangente qui est horizontale ; de même on retiendra le point D par une force tangente en D ; donc, puisqu'il y a équilibre, l'arc étant flexible, il s'ensuit que l'arc AC agit sur le point C comme une force tangente à la courbe en C, et que BD agit sur le point D comme une force tangente en D, et tirant de bas en haut. L'une quelconque de ces forces se nomme *la tension de la courbe en ce point.*

Revenons à l'arc CD : soit Q la tension au point D, Q_0 celle au point C : l'arc CD sera sollicité par les trois forces $Q, Q_0, g\rho s$. Ces trois forces forment un triangle GCD, et puisqu'il y a équilibre, elles sont dans le plan du triangle ; le point D étant arbitraire, il en résulte que *la courbe est plane ;* puisque le système de ces trois forces est en équilibre, la force principale doit être nulle, ce qui exige que la somme des projections sur les deux axes des x et des y soient nulles, car nous supposons que le plan de la courbe est le plan vertical des xy. Les projections sur l'axe OX sont $Q \cos.\alpha$, Q_0 et O ; et celles sur l'axe OY, sont $Q \cos.\beta$, O et $g\rho s$; or,

$$\cos.\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos.\beta = \frac{dy}{ds}$$

et les projections étant en sens contraires, on a

$$Q\frac{dx}{ds} = Q_0 \quad Q\frac{dy}{ds} = g\rho s \; ;$$

divisant ces deux équations l'une par l'autre, il vient

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g\rho s}{Q_0},$$

$\frac{g\rho}{Q_0}$ est une constante. Soit a cette constante qui est une certaine fonction déterminée de x,y; alors $\frac{dy}{dx}=as$. ou $y'=as$; il s'agit d'intégrer cette équation : remarquons que

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx,\quad s=\frac{y'}{a}$$

d'où

$$dy'=a\sqrt{1+y'^2}\,dx\,,\ \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}}=adx\ :$$

pour intégrer cette nouvelle équation, observons que l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{d\sqrt{1+x^2}}{x},$$

donne

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{d\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{d(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}=d.l\,(x+\sqrt{1+x^2})$$

d'où

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=l(x+\sqrt{1+x^2})+c\ ;$$

appliquant cette formule à

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+x'^2}}=adx\,,$$

en observant que pour le point le plus bas C

$$x=x_0\ \text{ et }\ y=0\,,$$

il vient

$$l(y'+\sqrt{1+y'^2})=a(x-x_0)$$

d'où passant aux nombres et multipliant et divisant par

$$\sqrt{1+y'^2}-y'$$

il vient encore

$$\frac{(y'+\sqrt{1+y'^2})(\sqrt{1+y'^2}-y')}{\sqrt{1+y'^2}-y')}=e^{a(x-x_0)}$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}-y'}=e^{a(x-x_0)},$$

d'où

$$\sqrt{1+y'^2}-y'=\frac{1}{e^{a(x-x_0)}}=e^{-a(x-x_0)},$$

on a aussi

$$y'+\sqrt{1+y'^2}=e^{a(x-x_0)}$$

retranchant cette équation de la précédente on obtient

$$2y'=e^{a(x-x_0)}-e^{a(x-x_0)}$$

ou

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{a(x-x_0)}-e^{-a(x-x_0)}a'x}{2}$$

l'intégration donne

$$\int dy=\int\frac{e^{a(x-x_0)}-e^{-a(x-x_0)}dx}{2}.$$

Or,

$$\int e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a}:$$

d'après cela intégrant entre les limites x et x_0 auxquelles correspondent $y;y_0$ (x_0y_0 coordonnées du point C, x,y coordonnées du point D variable), il vient

$$y-y_0=\frac{1}{2a}(e^{a(x-x_0)}e^{-a(x-x_0)}-2),$$

équation de la chaînette. Cette équation renferme trois indéterminées $x_0 y_0$ et a, et on a trois conditions pour les obtenir, puisque la courbe doit passer par les points A et B, et que la longueur de la courbe est constante; mais on peut opérer plus simplement : en prenant le point le plus bas pour origine, l'équation se réduit à

$$y=\frac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax}-2),$$

ou bien, faisant passer l'axe des y par le point le plus bas, ce qui donne

$$y-y_0=\frac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax}-2),$$

et en disposant de l'axe des x de manière que $y_0=\frac{1}{a}$, l'équation se réduit à

$$y=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}:$$

telle est l'équation la plus simple de la chaînette.

137. On voit que a varie avec les deux extrémités Fig. 40
de la chaînette, car g varie ainsi que Q_0 : il faut donc avoir a en fonction de la longueur du fil et des coordonnées des points de suspension : prenons le cas particulier où les deux points de suspension sont à la même hauteur. Soit

$$l=BC,\ 2h=AB:$$

on sait que l'arc $2l$ est proportionnel à $\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2a}$, ainsi que la moitié l, ainsi on aura

$$l=\frac{e^{ah}e^{-ah}}{2a} \text{ ou } 2al=e^{ah}-e^{-ah},$$

en prenant

$$x = h = \mathrm{BD}\ ;$$

développant e^{ah} et e^{-ah} en série, on aura :

$$e^{ah} = 1 + \frac{ah}{1} + \frac{a^2h^2}{1.2} + \frac{a^3h^3}{1.2.3} + ..$$

$$e^{-ah} = 1 - \frac{ah}{1} + \frac{a^2h^2}{1.2} - \frac{a^3h^3}{1.2.3}, \text{ etc.},$$

d'où

$$e^{ah} - e^{-ah} = 2\left(ah + \frac{a^3h^3}{1.2.3} + \frac{a^5h^5}{1.2.3.4.5} + ...\right)$$

si nous nous bornons aux termes du deuxième degré et si nous posons $\frac{a^2h^2}{2} = \alpha$, il vient

$$l = h\left(1 + \frac{\alpha}{6} + \frac{\alpha^2}{120} + \text{etc.,}\right),\ \frac{l}{h} = 1 + \frac{\alpha}{6} + \frac{\alpha^2}{120} + \text{etc.,}$$

or, $2l > 2h$ donc $\frac{l}{h} > 1$ et *à fortiori* $\frac{l}{h} > 0$ ou positif : de l'équation précédente, on déduit

$$6\left(\frac{l}{h} - 1\right) = \alpha + \frac{\alpha^2}{4.5} + \text{etc.,}$$

ainsi tous ces termes sont positifs et on a $6\left(\frac{l}{h} - 1\right) > \alpha$:

l'égalité précédente donne $\alpha = \dfrac{6\left(\frac{l}{h} - 1\right)}{1 + \frac{\alpha}{4.5} + \text{etc.}}$, si on fait dans le deuxième membre $\alpha = o$, on obtiendra une valeur trop grande dans le premier. Soit α_1 la valeur ainsi obtenue, cette valeur est trop grande, et si on la substitue dans le deuxième membre, la valeur correspondante

qui en résulte $\alpha_2 = \dfrac{6\left(\frac{l}{h}-1\right)}{1+\frac{\alpha_1}{4.5}+\text{etc.}}$ sera trop petite : ainsi α est compris entre α et α_1, puis entre α_2 et : ces deux limites sont plus rapprochées que les précédentes, car α_2 est compris entre o et α_1, de même, on aurait d'autres limites $\alpha_2\alpha_3,\alpha_3\alpha_4$.., de plus en plus rapprochées, on aura une grande approximation en prenant seulement les termes du deuxième degré, par exemple, soit

$$l=3, h=2, \frac{l}{h}-1=\frac{1}{2}, \alpha_0=0 \quad \alpha_1=6\tfrac{1}{2}=3$$

$$\alpha_2=\frac{6\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{20}}=2{,}55, \quad \alpha_3=\frac{6\frac{1}{2}}{1+\frac{2{,}55}{20}}=2{,}64, \text{ etc.},$$

On peut déterminer α ou a, y_0 s'ensuit puisque $y_0=\frac{1}{a}$, et toutes les constantes sont déterminées.

138. La tension T en un point quelconque de la chaînette est $T^2=Q_0^2+g^2\rho^2s^2$, ainsi la tension minimum a lieu pour le point le plus bas.

139. Il semble que la méthode précédente ne pourrait plus être employée si la chaînette n'offrait pas un point dont la tangente soit horizontale, mais il n'en est rien, car en opérant de la même manière, après avoir décomposé la force agissant au point le plus bas, en deux autres, l'une horizontale et l'autre verticale, on parviendra au même résultat; seulement la quantité a n'a pas la même valeur.

140. On peut encore se demander pourquoi on n'a pas exprimé que le moment linéaire principal est nul : ordinairement on élude cette difficulté en disant que le raisonnements étant indépendants de la longueur

de l'arc, et le moment linéaire étant nul lorsque cet arc est infiniment petit, il en résulte qu'il en est de même, quelle que soit la longueur de l'arc s ; mais on peut faire voir qu'en l'égalant à zéro on parviendra encore à l'équation $y'=as$, en effet, le moment linéaire principal est égal à

$$Q_0 y_0 + Qx\frac{dy}{ds} - Qy\frac{dx}{ds} - g\rho s\xi$$

(ξ étant l'abscisse du centre de gravité). En changeant le signe et remplaçant $s\xi$ par sa valeur

$$s\xi = \int_{x_0}^{x} x \sec.\theta\, dx = \int_{x^0}^{x} x ds,$$

on a la condition

$$-Q_0 y_0 + Q\left(y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds}\right) + g\rho\int_{x_0}^{x} x ds = 0:$$

or,

$$Q_0 = Q\frac{dx}{ds}, g\rho s = Q\frac{dy}{ds},$$

et l'équation précédente devient

$$Q_0(y - y_0) - g\rho s x + g\rho\int_{x_0}^{x} x ds = 0:$$

intégrant par parties $g\rho\int_{x_0}^{x} x ds$, on trouve

$$g\rho\int_{x_0}^{x} x ds = g\rho s x - \int_{s_0}^{s} s dx$$

et par suite

$$Q_0(y - y_0) = g\rho\int_{s_0}^{s} s dx = Q_0\int_{y_0}^{y} y' dx$$

ou bien

$$Q_o y' = g\rho s \text{ ou } y' = \frac{g\rho s}{Q_o} = as,$$

ce qu'il fallait obtenir.

Il eût été plus simple d'observer que la chaînette pouvant être considérée comme un polygone funiculaire, les équations d'équilibre de celui-ci doivent lui convenir ; mais dans le cas de la chaînette, en supposant l'axe des z vertical, $\alpha = \alpha' = \alpha'' = 0$, etc. $\beta = \beta' = \beta''$, et cos. $\alpha = 0$, cos. $\beta = 0$, etc., ainsi les $2n$ premières équations d'équilibre se réduisent à

$$\frac{x'-x}{y'-y} = \frac{x''-x'}{y''-y'} = \text{etc.},$$

ce qui montre que la chaînette est une courbe plane, et dès lors il ne reste plus que les trois autres équations d'équilibre $X=0, Y=0, Z=0$ qui expriment que la force principale est nulle.

141. Considérons maintenant le cas particulier où la force verticale appliquée aux points de la courbe, au lieu d'être proportionnelle à la longueur des parties de cette courbe comme dans ce qui précède, est proportionnelle à la projection horizontale de ces parties.

Supposons pour plus de simplicité que le plan de la courbe est celui des xy, que la direction de la force est parallèle à l'axe de y, et que de plus la première extrémité du fil est placée à l'origine des coordonnées.

Soit T la tension en un point quelconque, s l'unité de l'arc, et p la valeur de la force appliquée en ce point, rapportée à l'unité de longueur et donnée en fonction de l'abscisse ; les composantes horizontales et verticales de la tension sont Fig 42.

$$T\frac{dx}{ds} \text{ et } T\frac{dy}{ds},$$

d'où

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right)=pdx,\ d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0$$

et par suite

$$T\frac{dy}{ds}=px+a,\ T\frac{dx}{ds}=b,$$

a et b étant des constantes ; on tire de là

$$\frac{dy}{dx}=\frac{px+a}{b},\ dy=\frac{px+a}{b}dx$$

et

$$y=\frac{1}{b}\left(\frac{px^2}{2}+ax\right)+c$$

équation d'une *parabole* dont l'axe est vertical. On a de plus

$$T^2=\left(T\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(T\frac{dx}{ds}\right)^2=(px+a)^2+b^2$$

et

$$T=\sqrt{(px+a)^2+b^2}.$$

142. Les résultats précédents sont exprimés d'une manière plus simple quand on transporte l'origine des coordonnées au point le plus bas de la courbe, où la tangente est horizontale, et qui est le sommet de la parabole ; car alors $a=0$, $c=0$ et les équations précédentes deviennent, $y=\frac{px^2}{2b}$ équation simplifiée de la parabole et $T=\sqrt{p^2x^2+b^2}$; mais $b=\frac{px^2}{2y}$, ainsi $T=\sqrt{p^2x^2+b^2}$: ces nouvelles équations ne renferment plus rien d'indéterminé, on voit d'après ces équations que le *maximum de tension a lieu au point le plus élevé de la courbe.*

143. Quant à la longueur de l'arc, on l'obtiendra géné-

ralement en intégrant l'expression $dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ dans laquelle on remplacera $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur.

En désignant par h et f l'abscisse et l'ordonnée du point le plus élevé de la courbe, en comptant les ordonnées de bas en haut, on aura pour le dernier point, c'est-à-dire pour le point le plus élevé, $x=h, y=f$, et par suite

$$b=\frac{ph^2}{2f},\ \mathrm{T}=\sqrt{p^2h^2+\left(\frac{ph^2}{2f}\right)^2}=\frac{ph^2}{2f}\sqrt{1+\frac{4f^2}{h^2}}.$$

Si on désigne par α l'angle de l'élément supérieur de la courbe avec l'horizon, et par Q, Q′ les composantes horizontale et verticale de la tension en ce point, on aura

$$\mathrm{Q}=\frac{ph^2}{2f},\ \mathrm{T}=\frac{\mathrm{Q}}{\cos.\alpha},\ \mathrm{tang.}\,\alpha=\frac{ph}{\mathrm{Q}}=\frac{2f}{h}.$$

En nommant S′ la valeur de l'arc compté du point le plus bas qui correspond à l'abscisse x', on aura

$$s'=x'+\frac{h^2}{2f}\left\{1+\frac{1}{3.2}\left(\frac{2fx'}{h}\right)^3-\frac{1}{5.8}\left(\frac{2fx'}{h}\right)^5+\right.$$
$$\left.\frac{1}{7.16}\left(\frac{2fx'}{h}\right)^7-\frac{s}{9.123}\left(\frac{2fx'}{h}\right)^9+\text{etc.}\right\},$$

et en faisant $x'=h$, et appelant C la valeur correspondante de s'

$$c=h\left\{1+\frac{1}{3.2}\left(\frac{2f}{h}\right)^2+\frac{1}{5.3}\left(\frac{2f}{h}\right)^4\right.$$
$$\left.+\frac{1}{7.16}\left(\frac{2f}{h}\right)^6-\frac{5}{9.123}\left(\frac{2f}{h}\right)^8+\text{etc.},\right\}$$

$$\left(\frac{2f}{h}\right)^2=6\left\{\frac{c-h}{h}+\frac{9}{10}\left(\frac{c-h}{h}\right)^2-\frac{54}{175}\left(\frac{c-h}{h}\right)^3\right.$$
$$\left.+\frac{207}{350}\left(\frac{c-h}{h}\right)^4-\text{etc.}\right\}$$

Les résultats précédents sont principalement utiles pour l'établissement des ponts suspendus ou supportés par des chaînes en fer ; si l'on veut de plus amples détails nécessaires aux applications, on pourra consulter l'ouvrage de *Navier* intitulé : *Rapport et mémoire sur les ponts suspendus.*

144. Examinons maintenant le cas le plus général d'un fil sollicité par des forces quelconques, distribuées d'une manière continue sur toute l'étendue du fil. Désignons maintenant par

x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque m du fil ;

s la longueur de l'arc de la courbe du fil comptée jusqu'au point m ;

s_o, s_n les longueurs de l'arc de cette courbe comptées jusqu'au premier et jusqu'au dernier point de la partie où les forces sont appliquées ;

$a_o b_o c_o$ et $a_n b_n c_n$ les angles formés avec les axes des x, y, z par les tangentes menées au premier et au dernier point de cette partie du fil ;

p la valeur de la force appliquée au point m, cette valeur étant rapportée à l'unité de longueur et donnée en fonction de l'arc s ;

α, β, γ les angles de la force p avec les axes, ces angles étant également donnés en fonction de l'arc s ;

T la valeur de la tension du fil au point m, T_o, T_n les valeurs de la tension au premier et au dernier point du fil où les forces sont appliquées.

D'après ce que nous avons dit à propos du polygone funiculaire, au lieu des trois premières équations obtenues dans ce cas, nous aurons les suivantes, en comptant les ordonnances de haut en bas :

$$\mathrm{T}\frac{dx}{ds} = \int_{s}^{s_n} dsp \cos.\alpha + \mathrm{T}_n \cos.a_n$$

$$\mathrm{T}\frac{dy}{ds} = \int_{s}^{s_n} dsp \cos.\beta + \mathrm{T}_n \cos.b_n$$

$$\mathrm{T}\frac{dz}{ds} = \int_{s}^{s_n} dsp \cos.\gamma + \mathrm{T}_n \cos.c_n,$$

qui devront subsister dans toute l'étendue de la courbe et qui en déterminent la figure.

Pour le premier point de la courbe, elles deviennent,

$$\mathrm{T}_0 \cos.a_0 = \mathrm{T}_n \cos.a_n + \int_{s_0}^{s_n} dsp \cos.\alpha$$

$$\mathrm{T}_0 \cos.b_0 = \mathrm{T}_n \cos.b_n + \int_{s_0}^{s_n} dsp \cos.\beta$$

$$\mathrm{T}_0 \cos.c_0 = \mathrm{T}_n \cos.c_n + \int_{s_0}^{s_n} dsp \cos.\gamma.$$

145. Les trois équations précédentes donnent

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\int_{s_0}^{s_n} dsp \cos.\alpha + \mathrm{T}_n \cos.a_n}{\int_{s_0}^{s_n} dsp \cos.\gamma + \mathrm{T}_n \cos.c_n}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\int_{s_0}^{s_n} dsp \cos.\beta + \mathrm{T}_n \cos.b_n}{\int_{s_0}^{s_n} dsp \cos.\gamma + \mathrm{T}_n \cos.c_n},$$

qui sont les deux équations différentielles de la courbe du fil : on en déduit également.

$$T=\sqrt{\left(\int_{s_0}^{s_n} dsp\cos.\alpha+T_n\cos.a_n\right)^2+\left(\int_{s_0}^{s_n} dsp\cos.\beta+T_n\cos.b_n\right)^2+\left(\int_{s_0}^{s_n} dsp\cos.\gamma+T_n\cos.c_n\right)^2},$$

pour l'expression de la tension dans un point quelconque.

146. Si l'on différentie les trois premières équations, on a :

$$Td.\frac{dx}{ds}+dT.\frac{dx}{ds}=-dsp\cos.\alpha$$

$$Td.\frac{dy}{ds}+dT.\frac{dy}{ds}=-dsp\cos.\beta$$

$$Td.\frac{dz}{ds}+dT.\frac{dz}{ds}=-dsp\cos.\gamma,$$

et si l'on ajoute ces équations après les avoir multipliées respectivement par

$$\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds},$$

en faisant attention que

$$\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}+\frac{dz^2}{ds^2}=1,$$

et par conséquent

$$\left(\frac{dx}{ds}d.\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d.\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{dz}d.\frac{dz}{ds}=0\right):$$

il viendra

$$-dT=pds\left(\frac{dx}{ds}\cos.\alpha+\frac{dy}{ds}\cos.\beta+\frac{dz}{ds}\cos.\gamma\right),$$

ou simplement $-dT=p\cos.\alpha dx+p\cos.\beta dy+p\cos.\gamma dz$.

Ce résultat donne la loi d'après laquelle la tension varie d'un point à l'autre du fil.

L'accroissement infiniment petit de la tension est égal à la force appliquée à l'élément du fil décomposée suivant la direction de cet élément.

147. Pour faire quelques applications du résultat précédent, on supposera en premier lieu que la force désignée par p est dirigée partout perpendiculairement à la courbe affectée par le fil. La valeur de dT devient alors nulle, et par suite la tension doit être constante dans toute l'étendue du fil : de plus en appelant r le rayon de courbure de la courbe dont il s'agit au point dont les coordonnées sont x,y,z, on aura d'après ce qui est démontré en analyse

$$\cos.\alpha = -\frac{r}{ds}d.\frac{dx}{ds}, \cos.\beta = -\frac{r}{ds}d.\frac{dy}{ds}, \cos.\gamma = -\frac{r}{ds}d.\frac{dz}{ds},$$

les trois équations du numéro précédent donneront donc également $\mathrm{T} = pr$, ou $p = \frac{\mathrm{T}}{r}$.

Ainsi, *quand un fil tendu est appliqué sur une surface fixe, la valeur de la pression exercée sur cette surface, rapportée à l'unité de longueur, est égale en chaque point du fil à la tension divisée par le rayon de courbure.* Cette proposition s'applique à diverses questions importantes dans la mécanique pratique.

148. Considérons maitenant le cas où la force p est supposée constante et dirigée toujours parallèlement à une même ligne verticale, c'est-à-dire le cas de la chaînette. Prenons le plan de la courbe pour plan des x,y, et l'axe des y parallèle à la force p et la pre- Fig. 41.

mière extrémité du fil pour origine des coordonnées. les trois équations du n° 146, se réduiraient ici à

$$T\frac{dx}{ds}=T_n\cos.a_n\ (1)\ T\frac{dy}{ds}=p(s_n-s)+T_n\sin.a_n\ (2)$$

et l'équation du n° 148 à $dT=-pdy$ (3). Pour obtenir de la manière la plus simple l'équation de la courbe, on remarquera que l'équation (3) donne un intégrant $T=\text{const}-py$, et comme l'on a pour la première extrémité de la courbe $y=0$ et $T=T_0$, il vient $T=T_0-py$ (4); en substituant cette expression dans l'équation (1), on trouvera

$$T_0-py=T_n\cos.a_n\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ (5),$$

d'où l'on tire

$$dx=\pm\frac{T_n\cos.a_n\,dy}{\sqrt{(T_0-py)^2-(T_n\cos.a_n)^2}},$$

le signe supérieur doit être pris dans la partie descendante de la courbe jusqu'au point le plus bas, et le signe inférieur dans la partie montante, au delà de ce point; en intégrant il vient

$$x=const.+\frac{T_n\cos.a_n}{p}.\log.T_0-py\mp\sqrt{(T_0-py)^2-(T_n\cos.a_n)^2}$$

et en déterminant la constante par la condition que $x=0$, quand $y=0$

$$x=\frac{T_n\cos.a_n}{p}.\log.\frac{T_0-py\mp\sqrt{(T_0-py)^2-(T_n\cos.a_n)^2}}{T_0-\sqrt{T_0^2-(T_n\cos.a_n)^2}}\ (6),$$

en repassant des logarithmes aux nombres, cette équation se changera en



$$T_o - py = \frac{1}{2}\left\{T_o - \sqrt{T_o^2 - (T_n \cos. a_n)^2}\right\} . e^{\frac{px}{T_n \cos. a_n}}$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{T_n^2 \cos.^2 a_n}{T_o - \sqrt{T_o^2 - (T_n \cos. a_n)^2}} . e^{-\frac{px}{T_n \cos. a_n}} \quad (7),$$

qui est l'équation cherchée de la chaînette.

149. Si l'on désigne par h et f l'abscisse et l'ordonnée du point le plus bas dans lequel on a $\frac{dy}{dx}=0$, les équations (5) et (6), donneront

$$h = \frac{T_n \cos. a_n}{p} . \log. \frac{T_n \cos. a_n}{T_o - \sqrt{T_o^2 - (T_n \cos. a_n)^2}}, \quad f = \frac{T_o - T_n \cos. a_n}{p}:$$

d'ailleurs on déduit des équations (1) et (2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p(s_n - s) + T_n \sin. a_n}{T_n \cos. a_n}$$

et en égalant cette expression de $\frac{dy}{dx}$ à celle qui se déduit de l'équation (5), on trouve

$$s = s^n + \frac{1}{p}\left\{T_n \sin. a_n \mp T_n \cos. a_n \sqrt{(T_o - py)^2 - (T_n \cos. a_n)^2}\right\} \quad (8).$$

Si l'on représente par C la longueur de la courbe depuis l'origine jusqu'au sommet ou au point le plus bas, le radical étant nul pour la valeur de y qui convient à ce point, on a

$$C = S_n + \frac{T_n \sin. a_n}{p}, \text{ d'où } S = C \mp \frac{1}{p} \sqrt{(T_o - py)^2 - T_n \cos. a_n)^2}.$$

150. Pour simplifier les résultats précédents, transportons l'origine des coordonnées en un point situé sur la verticale qui passe par le point le plus bas, et distant de ce dernier d'une longueur égale $\frac{T_n \cos. a_n}{p}$, et

comptons les nouvelles ordonnées verticales y' de bas en haut, posant à cet effet

$$x'=x-h,\text{ ou } x'=x-\frac{T_n\cos.a_n}{p}.\log.T_0-\frac{T_n\cos.a_n}{\sqrt{T^2-(T_n\cos.a_n)^2}},$$

$$y'=\frac{T_n\cos.a_n}{p}+f-y, py'=T_0-py,$$

il viendra, au lieu des équations (4),(6),(7),(8)

$$T=py'$$

$$x'=\frac{T_n\cos.a_n}{p}.\log.\frac{py'+\sqrt{p^2y'^2-(T_n\cos.a_n)^2}}{T_n\cos.a_n}$$

$$y'=\frac{T_n\cos.a_n}{2p}\left(e^{\frac{px}{T_n\cos.a_n}}+e^{-\frac{px}{T_n\cos.a_n}}\right)$$

$$S=\frac{1}{p}\sqrt{p^2y'^2-(T_n\cos.a_n)^2}.$$

L'équation de la chaînette est de la même forme que celle que nous avons obtenue par la voie directe.

On peut observer de plus que le rayon de courbure pour un point quelconque dont l'ordonnée est y', a pour expression $\frac{py'^2}{T_n\cos.a_n}$, et au point le plus bas $\frac{T_n\cos.a_n}{p}$.

151. Nous considérerons enfin le cas où la force p est proportionnelle à la projection horizontale des parties de la courbe ; on a alors au lieu des équations (1),(2) et (3)

$$T\frac{dx}{ds}=T_n\cos.a_n$$

$$T\frac{dy}{ds}=p(x_n-x)+T_n\sin.a_n$$

$$dT=-pdx.\frac{dy}{ds}=-\frac{pdy}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

les deux premières donnent

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p(x_n-x)+T_n\sin.a_n}{T_n\cos.a_n}(a),$$

et en intégrant

$$y=\frac{p\left(x_nx-\frac{x^2}{2}\right)+T_n\sin.a_n.x}{T_n\cos.a_n}(b),$$

la courbe du fil est une parabole dont l'axe est vertical. La valeur de la tension en un point quelconque de cette courbe, qui se déduit de la première équation est

$$T=T_n\cos.a_n.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dn}\right)^2}.$$

152. En représentant par h et f l'abscisse et l'ordonnée du point le plus bas de la courbe où la tangente est horizontale, et qui est le sommet de la parabole, les équations (a) et (b) donneront

$$h=x_n+\frac{T_nS_na_n}{p},f=\frac{p}{2T\cos.a_n}\left(x_n+\frac{T_n\sin.a_n}{p}\right)^2.$$

Si l'on veut transporter l'origine des coordonnées au point le plus bas, en comptant les nouvelles coordonnées y' de bas en haut, on doit écrire Fig. 43.

$$x=x'+h,\text{ ou }x=x'+x_n+\frac{T_n\sin.a_n}{p},y=f-y'$$

$$y=\frac{p}{2T_n\cos.a_n}\left(x_n+\frac{T_n\sin.a_n}{p}\right)^2-y'$$

et il vient en substituant ces valeurs,

$$y'=\frac{px'^2}{2T_n\cos.a_n},\ \tan g.a_n=\frac{2f}{h},$$

$$T_n\cos.a_n=\frac{ph^2}{2f}=T_0\cos.a_0,\ T=\frac{ph^2}{2f}\sqrt{1+\left(\frac{2fx'}{h^2}\right)^2},$$

équation semblable à celles auxquelles nous étions parvenus par une autre voie.

CHAPITRE VII.

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

153. On a sans doute remarqué que l'un quelconque des principes de la statique qui ont été exposés au commencement de cet ouvrage, peuvent être pris pour point de départ, et servir à démontrer les autres. En effet, les principes dont il s'agit sont compris dans une proposition unique beaucoup plus générale, par laquelle les conditions auxquelles doit satisfaire tout système de forces, pour que ces forces se fassent mutuellement équilibre, sont dans tous les cas complétement exprimées.

On indiquera en premier lieu, d'une manière plus précise, ce que l'on entend en général par un système de forces invariables. On peut concevoir l'existence d'un tel système en admettant que les divers points auxquels les forces sont appliquées soient réunies les uns aux autres par des verges rigides, qui s'opposent à ce que les distances actuelles de ces points ne viennent à varier. Il n'est pas nécessaire, d'ailleurs, pour assurer l'invariabilité de la figure du système, de supposer que tous les points matériels sont ainsi réunis deux à deux : il suffirait d'admettre, par exemple, que trois quelconques de ces points étant maintenus, les uns par rapport aux autres, dans des situations déterminées, le triangle invariable qu'ils forment

serait la base commune de pyramides dont tous les autres formeraient les sommets. Si les arêtes de ces pyramides sont parfaitement rigides, il est visible que la figure formée par l'ensemble des points matériels ne pourra subir aucun changement.

Ainsi, l'on se représente un système dont la figure est invariable, comme un assemblage de points matériels assujetties les uns aux autres par des tiges rigides, en assez grand nombre pour que les distances et les positions respectives de tous ces points ne puissent changer, et il suffira toujours, pour satisfaire à cette condition, que les distances d'un point quelconque à trois autres points du système au moins soient rendues invariables.

Nous avons considéré l'équilibre d'un polygone funiculaire, c'est-à-dire d'un assemblage de points matériels assujettis deux à deux par des fils inextensibles qui rendaient invariables les distances de deux points contigus. L'ensemble des points matériels pouvait d'ailleurs affecter une figure quelconque compatible avec la condition qui vient d'être énoncée : dans le cas particulier de la courbe funiculaire, la condition consistait seulement en ce que la somme des distances de deux ou plusieurs points contigus devait conserver toujours une valeur déterminée et constante.

On voit par ces exemples que l'on peut considérer en général des systèmes de deux espèces : dans les uns les positions relatives des points d'application des forces ne peuvent changer, dans les autres le mode de liaison des points matériels dont le système se compose est tel qu'il permet à ces points de prendre les uns par rapport aux autres, certains mouvements assujettis à des

conditions déterminées, par l'effet desquels l'ensemble de ces points peut présenter diverses figures. Un système est défini quand on donne le nombre de points matériels dont il se compose, et la nature des mouvements que ces points peuvent prendre les uns par rapport aux autres, ou par rapport à d'autres points fixes dans l'espace.

Les machines employées dans les travaux des arts présentent autant de systèmes, tels que ceux dont il s'agit, mais nous admettrons ici que les points matériels dont l'assemblage forme le système, sont réunis les uns aux autres par des verges parfaitement rigides, ou par des fils inextensibles et parfaitement flexibles, supposés sans masse. Nous convenons que les fils ou les verges dont il s'agit rendent invariables les distances d'une partie des points du système considérés deux à deux, en permettant néanmoins à l'ensemble de ces points de prendre certains mouvements relatifs, et d'affecter diverses figures différentes les unes des autres.

Cela posé, nous énoncerons en premier lieu le principe des *vitesses virtuelles*, nous vérifierons ensuite l'existence de ce principe dans l'équilibre des machines simples, puis nous en donnerons la démonstration générale, et enfin nous en exposerons les principales applications.

154. Concevons un système quelconque et représentons-nous la série infinie de figures que ce système peut affecter successivement sans violer les conditions de la liaison des points matériels. Ce système étant considéré dans une position déterminée, admettons que l'on ait appliqué des forces aux divers points, et

que l'on demande les conditions nécessaires pour que ces forces se fassent naturellement équilibre, on répondra à cette question de la manière suivante :

Supposons que l'on fasse subir au système un léger changement de figure quelconque, compatible avec le mode de liaison qui constitue ce système, et par l'effet duquel les points d'applications des forces aient décrit des espaces infiniment petits. Supposons, de plus, que les espaces décrits de cette manière par chaque point d'application aient été projetés sur les directions des forces appliquées à ce point, et désignons par δp l'espace infiniment petit, décrit par le point d'application de la force P entraîné dans le sens de la direction de cette force. Le produit $P\delta p$ de la force P par l'espace δp décrit par le point d'application de cette force dans le sens de sa direction, est ce que l'on nomme *moment virtuel* de la force P : cette quantité est regardée comme positive lorsque l'espace δp est décrit dans le sens de l'action de la force, et comme négative dans le cas contraire. Or, les forces appliquées au système seront telles qu'il y aura équilibre si, prenant la somme des moments virtuels de toutes ces forces, on trouve pour cette somme une valeur nulle, en sorte que la seule équation

$$\Sigma P\,\delta p = 0$$

exprime dans tous les cas les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équibre du système.

155. Il est aisé de reconnaître l'exactitude de cette proposition dans le cas des machines simples ; pour le levier, la nature du système consiste en ce que les deux points d'application m, m' des deux forces, forment avec le point fixe A un triangle dont la figure est Fig. 44.

invariable, et qui peut tourner librement autour de ce point, sans sortir du même plan qui contient aussi les directions des forces P,P′. On peut toujours supposer les côtés Am, Am' perpendiculaires sur ces directions. Soit $\delta\omega$ un angle infiniment petit décrit par le triangle autour du point A dans le sens de l'action de la force δ, on aura ici

$$\delta p = Am\delta\omega, \; \delta p' = -Am'\delta\omega,$$

l'équation précédente devient donc

$$P.Am\delta\omega - P'Am'\delta\omega = 0,$$

ou

$$P.Am = P' \times Am'.$$

La même remarque s'applique évidemment au treuil
Fig.45. ou au cabestan.

Considérons deux poids P,P′, attachés aux extrémités d'un fil, passant sur la poulie fixe A, et dont le dernier est en partie supporté par le plan incliné AC; la naturedu systèmeconsiste ici en ce quelepoids P ne peut se mouvoir que verticalement, le poids P′ ne peut se mouvoir que parallèlement à AC, et la longueur du fil doit être invariable. Or, si l'on imprime au système des deux poids un mouvement par lequel P doit descendre verticalement de δp, P′ s'élèvera verticalement de $\delta p.\frac{AB}{AC}$: la condition de l'équilibre est donc

$$P.\delta p - P'\delta p.\frac{AB}{AC} = 0,$$

ou

$$\frac{P}{P'} = \frac{AB}{AC};$$

on voit d'après ce résultat que le centre de gravité du système reste toujours à la même hauteur.

Soit une vis verticale au moyen de laquelle un poids Q suspendu à l'écrou mobile est maintenu en équilibre par une force horizontale P, appliquée tangentiellement à la circonférence du cercle lié à cet écrou. Désignons par h le pas de la vis, et par r le rayon du cercle. Si la vis tourne de la quantité angulaire $\delta\omega$, le point d'application de P décrira dans le sens de cette force l'espace $r\delta\omega$, et le point Q s'élèvera de la quantité $\frac{p.\delta\omega}{2\pi}$, π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, le principe des vitesses virtuelles donne donc pour la loi de l'équilibre

$$P.r\delta\omega - Q.\frac{h\delta\omega}{2\pi} = 0,$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{h}{2\pi r}.$$

156. Quel que soit le système que l'on considère, on reconnaîtra facilement, comme on l'a fait ci-dessus, que les conditions de l'équilibre déduites des principes ordinaires, ne diffèrent point de celles qui résultent de l'application du principe des vitesses virtuelles. Mais indépendamment de ces vérifications particulières, on peut démontrer en général, sans spécifier aucunement la nature du système, qu'en égalant à zéro la somme des moments virtuels des forces, on exprime complétement dans tous les cas les conditions d'équilibre.

Considérons un système quelconque et les forces qui lui sont appliquées. Chaque force peut toujours

être remplacée en attachant à son point d'application un fil parfaitement flexible, placé suivant la direction de la force, passant sur une ou plusieurs poulies de renvoi, et à l'extrémité duquel on attacherait un poids
Fig. 46. égal à l'effort que la force exerce : cela posé, concevons un levier qui peut tourner dans un plan vertical autour d'un axe horizontal fixe A, et imaginons que le poids qui représente la force quelconque P appliquée au système, ait été amené dans le plan du levier; la distance AM étant tellement déterminée que le point M du levier décrirait autour du point fixe A, dans un certain déplacement infiniment petit du système, le même espace δp que décrit le point d'application de la forcc P dans le sens de l'action de cette force. La même chose ayant été faite pour toutes les forces, on verra aisément que sans altérer les conditions de l'équilibre du système, on peut suppposer ou non que le levier est invariablement lié aux cordons qui soutiennent les poids P, et que ces poids ne peuvent se faire équilibre sur le système seul sans se faire également équilibre sur le levier seul. Mais l'équilibre du levier exige que la somme des produits P.AM soit nulle, et l'on peut substituer aux rayons AM, les arcs infiniment petits décrits simultanément par les points M qui sont proportionnels à ces rayons ; donc on doit avoir si l'équilibre est exact

$$\Sigma P\delta p = 0$$

pour un déplacement quelconque infiniment petit des parties du système, et cette condition assure effectivement dans un système quelconque aussi bien que dans un levier, l'existence de l'équilibre.

157. Nous citerons encore la démonstration suivante, qui a été donnée par *Lagrange*. Soient m, m', m'', etc., les points du système auxquels les forces P, P', P'', etc. sont appliquées, on peut toujours, au moyen de plusieurs moufles mobiles $AA'A''$, etc., et fixes $BB'B''$, etc., placés dans les directions de ces forces, et embrassés par un seul fil, remplacer toutes leurs actions par celle d'un poids unique R attaché à l'extrémité de ce fil : et si l'on suppose le poids R égal à l'unité, les quantités $PP'P''$, etc. seront respectivement égales aux nombres de cordons parallèles par lesquels les moufles mobiles attachés aux points $m, m'm''$, etc., sont respectivement sollicités. Cela posé, supposons le système en équilibre, et par conséquent le poids R immobile, imaginons ensuite que l'on fasse subir au système un déplacement très-petit, et soient Fig. 47.

$$\delta p, \delta p', \delta p''.$$

les espaces parcourus par l'effet de ce déplacement, par les points m, m', m'', etc., suivant les directions des forces qui les sollicitent, l'espace parcouru par le poids R sera évidemment

$$P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' + \text{ etc.},$$

or, on peut affirmer que si le système est en équilibre dans sa position actuelle, cette quantité sera nulle ; en effet, elle ne peut pas être positive, car si le poids R devait descendre par suite du déplacement supposé, comme sa tendance à descendre subsiste toujours, il ne se tiendrait pas immobile comme on le suppose. La quantité dont il s'agit ne peut pas non plus être négative, car lorsqu'un déplacement est possible dans

un système, un déplacement pareil, mais en sens contraire, l'est également, et si la quantité

$$P\delta p+P'\delta p'+P''\delta p''+ \text{etc.}$$

était négative pour l'une, elle serait positive pour l'autre; donc quand l'équilibre subsiste, cette quantité est nécessairement nulle; de plus, si elle est nulle et par conséquent, si le poids R demeure immobile, quel que soit le déplacement très-petit que l'on fasse subir au système, il y aura nécessairement équilibre, puisque les points m, m', m'', etc. n'auraient pas plus de tendance à se mouvoir dans un sens que dans un autre.

158. *Démonstration générale du principe des vitesses virtuelles.*

Les notions qui viennent d'être exposées ne peuvent laisser aucun doute sur la généralité du principe dont il s'agit, principe dont on déduira toujours, dans chaque cas particulier, les conditions de l'équilibre : mais cette propoition est si importante qu'il convient de la considérer sous un autre point de vue, pour en faire connaître la nature et concevoir le véritable sens.

Soit un système quelconque défini conformément à ce qui a été dit précédemment, sollicité par un certain nombre de forces et assujetti à certaines liaisons, représentées par des équations, fonctions des coordonnées des points d'application, et qui expriment la nature des liaisons établies entre les points qui constituent le système.

Considérons d'abord le cas où le système est assujetti à une liaison unique. Soient A, A', A'', etc., les points

du système xyz, $xy'z'$, etc., les coordonnées de ces points, et

$$f(xyz, x'y'z', \text{etc.}) = L = 0$$

la liaison ; nous supposerons que toutes les forces appliquées à un même point ont été réduites en une seule égale à leur résultante, et que ces forces P,P',P'', etc. ont pour projections, sur les axes des coordonnées X,Y,Z, X',Y',Z', etc. ; le système étant supposé maintenu en équilibre par les forces P,P',P'', etc., sous l'influence de la liaison L=0, l'intensité de l'une de ces forces sera arbitraire ou indéterminée : en effet, fixons tous les points à l'exception d'uu seul, le point A par exemple, une force quelconque appliquée à ce point le maintiendra en équilibre, pourvu qu'elle soit normale à la surface que ce point tend à décrire en vertu de la liaison L=0 : maintenant rendons au point A' sa mobilité, on pourra le maintenir en équilibre en y appliquantune force d'une certaine intensité, dans une direction opposée à celle dans laquelle le point tend à se mouvoir et de même pour chacun des autres points ; en sorte que l'équilibre sera établi par le système des forces P,P',P'', etc., dont l'une est complétement arbitraire quant à l'intensité, et dont les autres sont dépendantes et déterminées d'intensité comme de direction, car chacune d'elles doit être normale à la surface que son point d'application tendrait à décrire, si tous les autres étaient fixes. Si l'une des forces vient à augmenter dans un certain rapport, toutes les autres augmenteront dans le même rapport, car si nous concevons un nombre quelconque de systèmes égaux au premier, et par conséquent capables de maintenir les points en équilibre à l'aide de la liaison L=0, en les

réunissant tous ensemble, il y aura encore équilibre, pourvu toutefois que la liaison soit capable d'une résistance indéfinie : dans le cas contraire, elle serait rompue et tous les points deviendraient libres.

Nous avons vu que chaque force doit être normale à la surface représentée par L=0, en y considérant toutes les coordonnées comme constantes, à l'exception de celles du point que l'on considère : or, les cosinus des angles des forces avec les axes des coordonnées sont pour la force P, $\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}, \frac{Z}{P}$, pour la force P', $\frac{X'}{P'}, \frac{Y'}{P'}, \frac{Z'}{P'}$, ainsi de suite, ceux des normales correspondantes, sont

$$\frac{\frac{dL}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{dL}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{dL}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{dL}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz'}\right)^2}},$$

ainsi de suite; les forces devant agir suivant les normales, il faut pour l'équilibre que l'on ait (en faisant pour abréger)

$$\pm\frac{P}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\text{etc.}}}=\lambda, \pm\frac{P'}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2+\text{etc.}}}=\lambda',$$

ainsi de suite

$$\frac{X}{P}=\frac{\lambda}{P}\frac{dL}{dx}$$

ou $X = \lambda \frac{dL}{dx}$, de même,

$$Y = \lambda \frac{dL}{dy}, Z = \lambda \frac{dL}{dz}, X' = \lambda' \frac{dL}{dx'}, \text{ etc.,}$$

ou bien encore (*a*)

$$\frac{X}{\frac{dL}{dx}} = \frac{Y}{\frac{dL}{dy}} = \frac{Z}{\frac{dL}{dz}} = \lambda, \frac{X'}{\frac{dL}{dx'}} = \frac{Y'}{\frac{dL}{dy'}} = \frac{Z'}{\frac{dL}{dz'}} = \lambda', \text{ etc.}$$

il ne reste plus qu'à déterminer λ, λ', etc., car on en déduira les valeurs de X, Y, Z, et par suite celles des forces P, P', P'', etc.

Pour cela, fixons tous les points à l'exception de A et A', l'équilibre n'en subsistera pas moins, et la liaison $L=0$ se réduira à $f(xyz, x'y'z')=0$: si, en outre, nous rendons invariable la droite AA', et si enfin nous fixons le point milieu, nous n'aurons point troublé l'équilibre, d'ailleurs ces changements n'ont pas rendu les deux points A, A' entièrement fixes, car les coordonnées $xyz, x'y'z'$ ne seront assujetties qu'à cinq conditions, savoir ;

$$L=0, AA' = const., \frac{x+x'}{2} = a, \frac{y+y'}{2} = b \frac{z+z'}{2} = c,$$

a, b, c étant les coordonnées du milieu de la droite AA' ces trois dernières reviennent à

$$x' = 2a - x, y' = 2b - y, z' = 2c - z :$$

les deux points A, A' ne pourront plus décrire qu'une courbe tracée sur la surface de la sphère dont le dia mètre est AA', et de plus ces deux points occuperont toujours les extrémités d'un même diamètre, et par conséquent les droites qui joindront deux positions

successives de chacun de ces points seront parallèles : ainsi, si on considère deux positions infiniment rapprochées, les tangentes qui sont les limites des cordes seront aussi parallèles. Il faut, avons-nous dit, que les forces P,P' maintiennent les deux points A,A' en équilibre : or, leurs composantes suivant la normale sont détruites par la résistance de la sphère ou de son centre fixe, et les composantes suivant les tangentes ont seules quelque action : nous aurons donc deux forces parallèles appliquées à des bras de levier égaux, ainsi il faudra pour l'équilibre qu'elles soient égales et dirigées dans le même sens, car alors leur résultante passera par le point fixe

Pour avoir les composantes dont il s'agit, projetons chacune des deux forces sur la tangente correspondante, ou, ce qui est la même chose, sur l'une des tangentes ; or, les angles de la tangente ont pour cosinus

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

ainsi de suite, ou

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds};$$

ceux de la force P sont $\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}, \frac{Z}{P}$, ainsi le cosinus de l'angle formé par la force P avec la tangente est

$$\frac{Xdx+Ydy+Zdz}{Pds}$$

ou

$$\lambda \frac{\left(\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz\right)}{Pds}$$

et pour la force P′

$$\frac{X'dx+Y'dy+Z'dz}{P'ds},$$

ou

$$\lambda'\frac{\left(\frac{dL}{dx'}dx+\frac{dL}{dy'}dy+\frac{dL}{dz'}dz\right)}{P'ds},$$

on obtiendra les deux composantes ou les deux projections, en multipliant chaque cosinus par la force correspondante, ainsi en faisant disparaître le dénominateur ds, on aura l'égalité

$$\lambda\left(\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz\right)=\lambda'\left(\frac{dL}{dx'}dx+\frac{dL}{dy'}dy+\frac{dL}{dz'}dz\right)$$

d'ailleurs, les coordonnées $xyz, x'y'z'$, sont liées par les cinq équations ci-dessus.

En différentiant $L=0$, on trouve,

$$\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz+\frac{dL}{dx'}dx'+\frac{dL}{dy'}dy'+\frac{dL}{dz'}dz'=0,$$

les équations

$$x'=2a-x,\ y'=2b-y,\ z'=2c-z,$$

donnent

$$dx'=-dx,\ dy'=-dy,\ dz'=-dz,$$

et par suite,

$$\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz=\frac{dL}{dx'}dx+\frac{dL}{dy'}dy+\frac{dL}{dz'}dz,$$

donc pour que les deux composantes soient égales ou qu'il y ait équilibre, il faut qu'on ait $\lambda=\lambda'$; on trouverait de même $\lambda=\lambda''$, et ainsi de suite, il faut donc que $\lambda=\lambda'=\lambda''$, et les équations d'équilibre (a), deviennent (b),

$$\frac{X}{\frac{dL}{dx}}=\frac{Y}{\frac{dL}{dy}}=\frac{Z}{\frac{dL}{dz}}=\frac{X'}{\frac{dL}{dx'}}=\frac{Y'}{\frac{dL}{dy'}}=\frac{Z'}{\frac{dL}{dz'}}=\ldots=\frac{X^{n-1}}{\frac{dL}{dx^{n-1}}}=\lambda$$

(λ étant indéterminé), ce qui donne $3n-1$ équations d'équilibre, n étant le nombre de points : or, il y a $3n$ variables liées par la relation $L=0$, il n'en reste plus que $3n-1$: ainsi le nombre de variables indépendantes est égal à celui des équations d'équilibre.

La liaison $L=0$ peut être rompue et remplacée par des forces ayant pour projection

$$-\lambda\frac{dL}{dx}, -\lambda\frac{dL}{dy}, -\lambda\frac{dL}{dz}, -\lambda\frac{dL}{dx'}, \text{ etc. :}$$

ces forces maintiennent le système en équilibre comme la liaison ou elles lui sont équivalentes : elles représentent la résistance opposée en chaque point par la liaison, d'où l'on conclut que les conditions précédentes sont nécessaires et suffisantes pour l'équilibre.

Supposons maintenant que le système est assujetti à plusieurs liaisons

$$L=0, M=0, N=0, \text{etc.},$$

d'après ce qui précède, on peut remplacer chaque liaison par le système des résistances qu'elle oppose en chaque point. Soient Q, Q', Q'', etc., les résistances pour la liaison $L=0$, R, R', R'', etc., celles pour la liaison $M=0$, et ainsi de suite, et enfin, P, P', P'', etc., les forces appliquées aux différents points du système. Quand toutes les liaisons seront ainsi détruites, chaque point devra être en équilibre isolément : or, d'après ce que nous avons vu les projections de Q sont

$$-\lambda\frac{dL}{dx}, -\lambda\frac{dL}{dy}, -\lambda\frac{dL}{dz},$$

celle de Q', $-\lambda \frac{dL}{dx'}$, etc., de même celles de R, seront

$$-\mu \frac{dM}{dx}, -\mu \frac{dM}{dy}, -\mu \frac{dM}{dz}$$

et ainsi de suite, pour toutes les résultantes, on donc

$$(c)\ X = \lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx} + \nu \frac{dN}{dx} + \text{etc}$$

$$Y = \lambda \frac{dL}{dy} + \mu \frac{dM}{dy} + \nu \frac{dN}{dz} + \text{etc}$$

$$Z = \lambda \frac{dL}{dz} + \mu \frac{dM}{dz} + \nu \frac{dN}{dz} + \text{etc.}$$

$$X' = \lambda \frac{}{dx'} + \mu \frac{dM}{dx} + \nu \frac{dN}{dx'} + \text{etc.}$$

etc.

Si l'on élimine les indéterminées λ, μ, ν, on aura les équations d'équilibre : or, n étant le nombre des points, m celui des liaisons, il y aura $3m$ équations entre λ, μ, ν. ainsi il restera $3n - m$ équations d'équilibre : d'ailleurs, on aura, outre les $3n$ variables m relations, par conséquent, il n'y aura que $3n - m$ variables indépendantes, c'est-à-dire autant que d'équation d'équilibre ; ces $3n - m$ équations sont suffisantes, car d'après ces équations les forces P, P', P'', etc., pourront être décomposées en plusieurs autres, ayant pour projection

$$\lambda \frac{dL}{dx},\ \lambda \frac{dL}{dy}, \text{ etc.},$$

qui feront équilibre aux résistances du système.

La manière la plus simple d'éliminer λ, μ, ν consiste à multiplier chaque équation par des coefficients tels qu'en faisant la somme, les coefficients de λ, μ, ν soient nuls : nous allons opérer cette détermination.

Si un point se meut sur une courbe et parcourt dans un instant Δt un arc $\pm\Delta s$, le rapport

$$\pm\frac{\Delta s}{\Delta t}=\pm\frac{ds}{dt}=\omega,$$

représente la vitesse moyenne, et on a

$$\omega=\pm\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{dt}:$$

ici nous prendrons le radical avec le signe $+$, parceque la vitesse est une quantité absolue : cette vitesse est dirigée suivant la tangente, ainsi on a pour sa projection sur les axes

$$\omega\cos.\alpha=\omega\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},\ \omega\cos.\beta=\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

$$\omega\cos.\gamma=\frac{\omega\, dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

ou bien

$$\omega\cos.\alpha=\frac{dx}{dt},\ \omega\cos.\beta=\frac{dy}{dt},\ \omega\cos.\gamma=\frac{dz}{dt}.$$

Cela bien entendu, supposons maintenant que le système vienne à prendre un mouvement virtuel, c'est-à-dire compatible avec les liaisons, les vitesses virtuelles correspondantes auront néanmoins certaines liaisons entre elles. Ainsi, $L=0$ étant l'une des liaisons, il faudra que, dans toute la durée du mouvement, cette relation soit satisfaite : les coordonnées variant avec le temps t, nous pouvons prendre t pour variable indépendante, et alors la différentiation de $L=0$ donne (d)

$$\frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dL}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dL}{dz}\frac{dz}{dt}+\frac{dL}{dx'}\frac{dx'}{dt}+\ldots\ldots=0$$

ou bien

$$\frac{dL}{dx}\omega\cos.\alpha+\frac{dL}{dy}\omega\cos.\beta+\frac{dL}{dz}\omega\cos.\gamma+\frac{dL}{dx'}\omega\cos.\alpha'+\text{etc.}=0$$

pour une seconde liaison $M=0$, on aurait de même

$$\frac{dM}{dx}\omega\cos.\alpha+\frac{dM}{dy}\omega\cos.\beta+\frac{dM}{dz}\omega\cos.\gamma+\frac{dM}{dx'}\omega\cos.\alpha'+\text{etc.}=0,$$

et ainsi de suite pour les autres liaisons.

En considérant les équations précédentes, on voit immédiatement qu'en multipliant les équations (c), la première par $\frac{dx}{dt}$, c'est-à-dire par la projection de la vitesse virtuelle du point A sur l'axe des x, la deuxième par $\frac{dy}{dt}$, ainsi de suite, et ajoutant tous ces produits, les coefficients de λ,μ,ν sont nuls, de sorte qu'on a

$$(e)\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)$$
$$+\left(X'\frac{dx'}{dt}+Y'\frac{dy'}{dt}+Z'\frac{dz'}{dt}\right)+\text{etc.}=0,$$

telle est l'équation cherchée qui établit le principe des vitesses virtuelles.

On peut mettre cette équation sous une autre forme : les cosinus des angles, des vitesses virtuelles ω,ω',ω''..... avec les axes, sont

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\omega},\frac{\frac{dy}{dt}}{\omega},\frac{\frac{dz}{dt}}{\omega},\frac{\frac{dx'}{dt}}{\omega'},\text{etc.},$$

ceux des forces P,P',P'', etc., sont

$$\frac{X}{P},\frac{Y}{P},\frac{Z}{P},\frac{X'}{P'},\text{etc.},$$

ainsi le cosinus de l'angle de la force P, avec la vitesse ω, est

$$\cos.(P,\omega)=\frac{X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}}{P\omega}$$

d'où l'on déduit

$$X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}=P\omega\cos.(P,\omega),$$

on trouverait des égalités analogues pour les autres forces ; en vertu de ces relations, l'équation précédente devient :

$$P\omega\cos.(P,\omega)+P'\omega'\cos.(P',\omega')+P''\omega''\cos.(P'',\omega'')+\text{etc.}=0,$$

chaque terme est le produit de *la force par la projection de la vitesse virtuelle sur sa direction*, ou le produit de *la vitesse virtuelle par la projection de la force sur cette vitesse*. Ces produits s'appellent *moments virtuels ;* donc, dans l'*équilibre d'un système soumis à des liaisons quelconques, la somme des moments virtuels est égale à zéro.*

Réciproquement, *lorsque cette condition est satisfaite, l'équilibre existe.* Comme l'équation dont il s'agit n'est autre chose que

$$X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt},\ \text{etc.}=0,$$

sous une autre forme, prenons cette dernière qui doit être satisfaite quelles que soient les $3n$ projections des vitesses, pourvu qu'elles satisfassent aux m équations

$$\frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dL}{dy}\frac{dy}{dt}\ldots+=0$$

$$\frac{dM}{dx}\frac{dx}{dt}+\ldots=0,$$

etc., etc.

multiplions ces équations respectivement par $-\lambda, -\mu, -\nu$, et ajoutons les équations résultantes avec l'équation écrite plus haut, et il viendra

$$\left(X-\lambda\frac{dL}{dx}-\mu\frac{dM}{dx}-\ldots\right)\frac{dx}{dt}+\left(Y-\lambda\frac{dL}{dy}-\mu\frac{dM}{dy}-\ldots\right)\frac{dy}{dt}$$
$$+\left(Z-\lambda\frac{dL}{dz}-\ldots\right)-\text{etc.}=0.$$

Cette équation doit être satisfaite quelles que soient les vitesses virtuelles, pourvu que les équations différentielles de

$$=0,\ M=0,\ N=0,\ \text{etc.},$$

le soient aussi. Or, ces dernières déterminent m projections de vitesse : supposons ces m projections calculées et substituées dans l'équation précédente : quelles que soient ces valeurs, les m premiers termes renfermant m indéterminées, nous pourrons les déterminer de manière à rendre nuls les coefficients des m premiers termes, et alors il ne restera que $3n-m$, termes qui devront être nuls séparément, puisque l'équation précédente doit avoir lieu quelles que soient les $3n-m$, projections des vitesses qui y entrent : donc, en définitive, tous les coefficients des projections des vitesses doivent être nuls, par conséquent les conditions d'équilibre exprimées par les équations (e), sont satisfaites.

Si on imprime un mouvement virtuel à un système, les vitesses seront virtuelles, et m de leurs projections satisferont aux équations différentielles de

$$L=0,\ M=0,\ N=0,\ \text{etc},$$

toutes les autres projections de vitesses sont arbitraires, et pour avoir les constantes indéterminées

de l'équation ci-dessus, on fera varier le mouvement virtuel de manière que $3n-m$ projections des vitesses soient déterminées. Si on donnait plus de $3n-m$ mouvements, les conditions trouvées rentreraient les unes dans les autres, puisque $3n-m$ est le nombre des équations d'équilibre.

159. Nous allons montrer maintenant par divers exemples l'usage que l'on peut faire du principe des vitesses virtuelles pour la recherche des conditions d'équilibre d'un système de forces.

Nous ferons d'abord l'application du principe des vitesses virtuelles à la recherche des conditions de l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un seul point matériel. Dans ce cas, l'équation générale (e) devient

$$X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}=0:$$

si le point est entièrement libre, cette équation devant être satisfaite quels que soient

$$\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt},$$

il faudrait que l'on eût

$$X=0, Y=0, Z=0,$$

ce sont les équations d'équilibre. Si le point est assujetti à rester sur une surface $u=0$, deux des projections de la vitesse seront arbitraires, le point pourra se mouvoir sur une courbe parallèle au plan des xy, et pour laquelle on a z=const., ainsi $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ seront assujettis à la relation

$$\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dt}=0,\ \frac{dz}{dt}=0:$$

ces équations combinées avec la première donnent

$$\frac{X}{\frac{du}{dx}}=\frac{Y}{\frac{du}{dy}},$$

on trouverait de même

$$\frac{X}{\frac{du}{dx}}=\frac{Z}{\frac{du}{dz}},$$

donc les conditions d'équilibre sont

$$\frac{X}{\frac{du}{dx}}=\frac{Y}{\frac{du}{dy}}=\frac{Z}{\frac{du}{dz}}.$$

Si le point est assujetti à rester sur une courbe $y=f(x)$, $z=F(x)$, alors

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt},$$

sont assujettis aux relations

$$\frac{dy}{dt}=f'(x)\frac{dx}{dt}, \frac{dz}{dt}=F'(x)\frac{dx}{dt},$$

l'équation d'équilibre devient

$$X+Yf'(x)+ZF'(x)=0,$$

ou

$$X+Yy'+Zz'=0$$

ou enfin

$$Xdx+Ydy+Zdz=0.$$

160. Passons au cas d'un système invariable : il est évident qu'il n'y aura plus que l'équation d'équilibre exprimant que les distances de trois points sont invariables.

Si le système est entièrement libre, on pourra lui donner un mouvement virtuel quelconque ; si on lui donne d'abord un mouvement de translation le long de l'axe des z, on aura

$$\omega = \omega' = \omega'' = \text{etc.},$$

et

$$\frac{dx}{dt}=0,\ \frac{dy}{dt}=0,\ \frac{dx'}{dt}=0 \text{ etc.},\ \frac{dr}{dt}=\frac{dr'}{dt}=\text{etc.},$$

alors l'équation générale se réduit à

$$Z+Z'+Z''+\ldots=0\,;$$

en donnant des mouvements virtuels de translation le long de chacun des autres axes, on trouverait de même

$$Y+Y'+Y''+\ldots=0,\quad X+X'+X''+\ldots=0.$$

Donnons maintenant au système un mouvement de rotation autour de l'axe des z, alors les coordonnées x, y, z d'un point quelconque satisfont aux relations

$$z = const,\qquad x^2+y^2=r^2,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dz}{dt}=0,\ x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0,$$

et cette dernière revient à

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{y}=-\frac{\frac{dy}{dt}}{x}=\frac{\omega}{r}:$$

il est évident que ω aura pour tous les points une valeur constante Ω, ce sera la vitesse d'un point à une distance égale à l'unité de l'axe de rotation ; en substituant aux projections des vitesses leurs valeurs dans l'équation générale, on obtient

$$\{(Xy-Yx)+(X'y'-Y'x')+\ldots\}\,\Omega=0,$$

cette équation exprime que la projection du moment linéaire principal sur l'axe des z doit être nulle : on trouverait encore deux conditions analogues en donnant au système un mouvement de rotation autour des deux autres axes.

S'il y avait un point fixe dans le système, en le prenant pour origine des coordonnées, on ne pourrait pas donner au système les trois premiers mouvements, et les trois équations d'équilibre seraient celles relatives à la dernière espèce de mouvement.

S'il y avait un axe fixe, les équations d'équilibre se réduiraient à une seule, relative au mouvement de rotation autour de cet axe ; si le système pouvait glisser le long de cet axe, il y en aurait deux. Enfin, si le système était assujetti à la condition d'avoir tous les points dans un plan donné, le système ne pourrait plus se mouvoir autour des deux axes pris dans ce plan, ni le long d'un troisième extérieur à ce plan, et les équations d'équilibre se réduiraient à trois, relatives à deux mouvements de la première espèce, et un de la seconde.

Soit encore un système invariable dont toutes les forces se réduisent à des poids, l'axe des z étant vertical, l'équation d'équilibre devient

$$\mathrm{P}\frac{dz}{dt}+\mathrm{P}'\frac{dz'}{dt}+\text{etc.}\ldots=0=d\frac{(\mathrm{P}z+\mathrm{P}'z'+\mathrm{P}''z''+\text{etc.}}{dt}=\frac{d.\mathrm{R}\zeta}{dt},$$

R étant la résultante, et ζ le z du centre de gravité ; ce qui montre que, dans le cas d'équilibre, la tangente à la courbe que tend à décrire le centre de gravité en vertu de son mouvement virtuel, est horizontale. Cela explique comment, dans le pendule, il n'y a que deux positions d'équilibre.

Ce qui précède renferme, comme cas particulier, le levier, le treuil, etc., mais on peut faire l'application directe du principe à ces divers systèmes. Cela n'offre aucune difficulté.

161. Pour terminer ces applications, nous reprendrons l'exemple du polygone funiculaire.

Fig. 38. Soient A,B,C,D, etc., les sommets successifs de ce polygone, l, l', l'', les longueurs données des côtés AB,BC.... etc., et

$$xyz,\ x'y'z',\ \text{etc.},$$

les coordonnées des sommets, les équations

$$\mathrm{L}=0,\ \mathrm{M}=0,\ \mathrm{N}=0$$

sont dans ce cas,

$$\mathrm{L}=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}-l=0$$
$$\mathrm{M}=\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}-l'=0$$
$$\mathrm{N}=\sqrt{(x''-x''')^2+(y''-y''')^2+(z''-z''')^2}-l''=0$$
etc.,

d'où il résulte

$$\frac{d\mathrm{L}}{dx}=-\frac{d\mathrm{L}}{dx'}=\frac{x-x'}{l},\ \frac{d\mathrm{M}}{dx'}=-\frac{d\mathrm{M}}{dx''}=\frac{x'-x''}{l'},\text{etc.},$$
$$\frac{d\mathrm{L}}{dy}=-\frac{d\mathrm{L}}{dy'}=\frac{y-y'}{l},\ \frac{d\mathrm{M}}{dy'}=-\frac{d\mathrm{M}}{dy''}=\frac{y'-y''}{l'},\text{etc},$$
$$\frac{d\mathrm{L}}{dz}=-\frac{d\mathrm{L}}{dz'}=\frac{z-z'}{l},\ \frac{d\mathrm{M}}{dz'}=-\frac{d\mathrm{M}}{dz''}=\frac{z'-z'}{l'},\text{etc.},$$

et toutes les autres différences partielles de L,M,N, etc., qui entrent dans les formules précédentes, seront égales à zéro. Si nous posons pour abréger

$$\nu=\sqrt{\left(\frac{d\mathrm{L}}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mathrm{L}}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mathrm{L}}{dz}\right)^2},$$
$$\nu'=\sqrt{\left(\frac{d\mathrm{M}}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mathrm{M}}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mathrm{M}}{dz}\right)^2},\text{etc.},$$

et si on désigne par Q,Q',Q'', etc., les forces normales capables de maintenir le système en équilibre, on aura, d'après ce que nous avons vu,

$$Q=\nu\lambda, Q'=\nu'\mu, \text{ etc. :}$$

si nous considérons les deux points A,B, on aura

$$\nu=\nu'=\pm 1,\ Q=Q'=\pm\lambda,$$

et l'on prendra les signes supérieurs ou inférieurs, selon que la valeur de λ sera positive ou négative. On conclut de là et des équations précédentes, que les points A,B seront sollicités par des forces égales et contraires, dirigées suivant la droite AB, ou suivant ses prolongements, et dont la quantité λ, abstraction faite du signe, sera la grandeur commune; il en sera de même à l'égard des autres points, en sorte que, dans l'état d'équilibre, les quantités λ,μ,ν, etc., exprimeront les contractions ou les tensions des côtés successifs du polygone. En désignant par *abc*, *a'b'c'*, etc., les angles des forces Q,Q'..... avec les axes, on a

$$\cos.a=\pm\frac{x-x'}{l},\ \cos.b=\pm\frac{y-y'}{l},\ \cos.c=\pm\frac{z-z'}{l},$$

les signes correspondants à ceux de λ, on en conclut que la force appliquée au point A sera dirigée de A vers B, et exprimera une contraction du côté AB, quand cette valeur sera négative et que cette force agira dans le sens opposé, et exprimera une tension, lorsque la valeur de λ sera positive. L'un ou l'autre de ces deux cas sera possible, si les côtés du polygone sont des verges inflexibles jointes par des charnières; et le second cas pourra seul avoir lieu si les côtés sont des fils flexibles.

Les équations (*c*) pourront s'écrire comme il suit :

$$X=\lambda\frac{(x'-x)}{l},\ Y=\lambda\frac{(y'-y)}{l},\ Z=\lambda\frac{(z'-z)}{l},$$

$$X'+\lambda\frac{(x'-x)}{l}=\mu\frac{(x''-x')}{l'},\ Y'+\lambda\frac{(y'-y)}{l'}=\lambda'\frac{(z''-z')}{l'}$$

$$Z'+\lambda\frac{(z'-z)}{l}=\mu\frac{(z''-z')}{l'},\ X''+\mu\frac{(x''-x')}{l'}=\nu\frac{(x'''-x'')}{l''}$$

$$Y''+\mu\frac{(y''-y')}{l'}=\nu\frac{(y'''-y'')}{l''},\ Z''+\mu\frac{z''-z')}{l'}=\nu\frac{(z'''-z'')}{l''},$$

etc.

Les trois premières montrent que la tension λ sera la résultante des forces X, Y, Z. En les ajoutant aux trois suivantes, on aura

$$X+X'=\mu\frac{(x''-x')}{l'},\ Y+Y'=\mu\frac{(y''-y')}{l},\ Z+Z'=\mu\frac{(z''-z')}{l'},$$

ce qui fait voir que la tension μ sera la résultante de X', Y', Z', et des forces X, Y, Z, transportées au point B, parallèlement à elles-mêmes, et ainsi de suite : on arrive ainsi aux mêmes conclusions que par la méthode directe.

162. On remarquera l'analogie qui existe entre les méthodes qui s'appliquent aux questions de maxima et minima, et à la recherche des conditions d'équilibre d'un système de forces : pour reconnaître à quoi tient cette analogie, on observera que, dans l'équation

$$\Sigma P\delta p=0\ ,$$

ou

$$P'\delta p'+P''\delta p''+\text{etc.}=0,$$

qui exprime en général les conditions dont il s'agit, on peut, dans la plupart des cas naturels, regarder le premier membre comme étant la variation d'une certaine fonction φ des variables $p', p''.....$, en sorte qu'on aurait

$$\delta\varphi=P'\delta p'+P''\delta p''+\text{etc.},$$

l'équation précédente exprime donc la condition du maxima ou de minima de la fonction φ. Ainsi, l'on ne peut résoudre une question d'équilibre, sans résoudre en même temps une question de maximum ou de minimum.

Considérons le cas particulier où toutes les forces appliquées au système seraient verticales et constantes, c'est-à-dire le cas où ce système serait formé d'un assemblage de corps pouvant se lier les uns aux autres d'une manière quelconque, sans qu'aucune force étrangère leur soit appliquée. Toutes les lignes p, p', p''...., sont alors parallèles; les forces P, P', P''... sont constantes, et par conséquent

$$\varphi = Pp + P'p' + P''p'' + :$$

les lignes p', p''..... peuvent être comptées à partir de points fixes quelconques, pris sur les directions des forces. Si l'on suppose ces lignes comptées à partir d'un même plan horizontal, la quantité précédente, divisée par la quantité constante

$$P + P' + P'' + \ldots,$$

c'est-à-dire la fonction

$$\frac{Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.}}{P + P' + P'' + \text{etc.}}$$

représentera la distance du centre de gravité du corps du système au plan horizontal dont il s'agit. Les conditions nécessaires pour que le système soit en équilibre, sont donc celles qui doivent avoir lieu pour que le centre de gravité du corps du système soit placé le plus haut ou le plus bas possible. Le *maximum* correspond au cas de l'*équilibre stable*, et le *minimum* au cas de l'*équilibre instantané*.

D'après cela, si une chaîne pesante, suspendue par ses extrémités à deux points fixes, est en équilibre, son centre de gravité sera le plus bas possible.

Si un point matériel pesant est placé sur une courbe, son ordonnée verticale sera un maximum ou un minimum pour les points où la tangente est horizontale. Le maximum aura lieu pour les points où la courbe est concave par en haut, et le minimum pour ceux où elle tourne sa concavité par en bas. Dans le premier cas, il y a équilibre stable, et dans le deuxième, équilibre instantané.

De même lorsqu'un élipsoïde homogène pesant repose sur un plan fixe horizontal, son centre de gravité est le plus bas ou le plus haut possible, et par suite il y a équilibre stable ou instable, selon que l'élipsoïde touche le plan par l'extrémité du plus petit ou du plus grand de ses trois axes. Enfin, si le point de contact a lieu pour une des extrémités de l'axe moyen, l'élévation du centre de gravité sera un maximum pour certaines sections du corps, et un minimum pour les autres. Par conséquent l'équilibre sera stable ou instable, selon que les déplacements tendront à avoir lieu dans le sens des premières ou des dernières.

DEUXIÈME PARTIE.

DYNAMIQUE.

NOTIONS FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE.

Cette science, aussi bien que la statique, emprunte à l'observation des faits naturels plusieurs notions fondamentales. La certitude de quelques-unes de ces notions est évidente. Il en est d'autres dont il n'est pas aussi facile de reconnaître la vérité, mais à l'égard desquelles il ne reste aucun doute, lorsqu'on s'est assuré, après des comparaisons multipliées, que les conséquences qui s'en déduisent par des raisonnements rigoureux, sont conformes aux phénomènes que la nature nous présente.

La *gravitation* est une propriété générale des corps. Tous les corps, en vertu d'une action réciproque dont nous ignorons entièrement la nature et le principe, sont attirés vers le centre de la terre; et la terre elle-même et les planètes sont soumises à la même action et s'attirent mutuellement : l'esprit pourrait sans doute, par une pure abstraction, concevoir les corps privés de la propriété dont il s'agit, mais dans la réalité, elle en est inséparable. Tout corps est *pesant:* il exerce pour s'approcher de la terre un effort qu'il faut détruire si l'on veut maintenir ce corps immobile.

Le *poids* des corps est la mesure de cet effort. On évalue les divers poids en les rapportant à un poids convenu pris pour unité.

L'unité de poids est en France le *kilogramme*, c'est-à-dire le poids d'un décimètre cube d'eau distillée, prise au maximum de densité.

La notion de *la masse*, comme nous l'avons déjà expliqué, se rapporte à la quantité de parties matérielles dont on regarde chaque corps comme étant composé. Quand on compare deux corps homogènes de même nature, par exemple, deux morceaux de fer, l'expérience apprend que leurs poids sont proportionnels à leurs volumes. Les quantités des parties matérielles contenues dans chacun sont aussi évidemment proportionnelles aux volumes. Ainsi la masse est alors nécessairement proportionnelle au poids. La même proportion s'étend à tous les cas, parce que nous regardons la force de la gravitation comme s'exerçant également sur toutes les parties matérielles, et l'action de cette force sur chaque corps comme l'indice, et en quelque sorte la mesure de la quantité de matière qui les constituent. Les corps, sous le rapport dont il s'agit, ne diffèrent pour nous que par les diverses quantités de matières qui s'y trouvent contenues sous un même volume donné. Aussi nous admettons ce principe que la *masse des corps est proportionnelle à leur poids*.

L'évaluation numérique des masses n'exige pas l'établissement d'une unité spéciale. On verra plus loin comment cette évaluation résulte de l'emploi d'autres unités.

L'idée de la masse est inséparable de la nature du

corps. Les recherches de physique indiquent l'existence de quelques agents naturels qui produisent des impressions sur nos sens, et qui semblent néanmoins n'avoir pas de masse. Ce ne sont point, à proprement parler, des corps, ou du moins ce ne sont point des corps auxquels on puisse appliquer les théories mécaniques.

Tous les esprits admettent l'idée du temps qui s'écoule et la nature des grandeurs relatives de divers intervalles de temps, d'où résulte, comme une conséquence nécessaire, la possibilité de mesurer et d'évaluer le temps en rapportant chaque intervalle à un intervalle déterminé pris pour unité. Les théories qui constituent la dynamique exigent nécessairement la considération du temps regardé comme une quantité mesurable.

L'unité de temps qui est aujourd'hui généralement adoptée est la *seconde sexagésimale*, c'est-à-dire le $\frac{1}{3600}$ d'une heure, ou le $\frac{1}{86400}$ d'un jour moyen.

Le mot de *mouvement* donne l'idée d'un phénomène qui consiste en ce qu'un corps matériel se déplace et prend, à mesure que le temps s'écoule, des situations différentes dans l'espace : un corps ne passe jamais d'une position à une autre, sans occuper successivement toutes les positions intermédiaires. De plus, il s'écoule toujours un certain intervalle de temps entre l'instant où le corps a quitté la première position et l'instant où ce même corps est parvenu à sa dernière position. La suite des positions intermédiaires des divers points du corps forme des lignes droites ou courbes que l'on peut concevoir tracées dans l'espace. Or, ces lignes peuvent avoir été décrites dans des inter-

valles de temps plus ou moins longs, d'où résulte la notion de *la vitesse*. La vitesse est le rapport de l'espace parcouru au temps employé à la parcourir, ou, ce qui revient au même, *l'espace parcouru dans l'unité de temps*.

On peut concevoir le mouvement d'un corps sans admettre que sa vitesse soit constante ou uniforme. En effet, les diverses parties d'une ligne qu'il aura décrite peuvent avoir été parcourues avec des vitesses différentes. Lorsque le mouvement d'un corps est tel que sa vitesse varie continuellement à mesure que le temps s'écoule et que le corps occupe de nouvelles situations dans l'espace, on se forme l'idée de la valeur de la vitesse dans un instant déterminé, en concevant qu'à cet instant cette vitesse devienne constante, et voyant quel espace serait alors parcouru dans l'unité de temps.

Dans le langage de la mécanique, on appelle *quantité de mouvement* d'un corps le *produit de la masse par la vitesse actuelle*.

On a dit que la gravitation était une propriété générale du corps. Une autre propriété non moins générale, et désignée sous le nom d'*inertie*, consiste en ce que l'état actuel d'immobilité ou de mouvement d'un corps n'est jamais altéré, à moins qu'une cause étrangère n'agisse sur ce corps. Un corps en repos, sur lequel aucune cause étrangère n'agira, ou qui sera soumis à des actions opposées qui se détruiront réciproquement, demeurera éternellement en repos. Si ce même corps est actuellement en mouvement, il conservera éternellement son mouvement, c'est-à-dire qu'il continuera à se mouvoir dans la même direction et

avec la même vitesse, parcourant toujours en ligne droite des espaces égaux en temps égaux.

L'inertie, ainsi définie, doit être regardée comme une qualité inhérente à la matière, et dont l'existence nous est attestée par l'ensemble des phénomènes naturels. La notion de l'inertie est entièrement liée à la notion de la masse. Tout assemblage de matière qui gravite et qui a de la masse ne peut être mis en mouvement, sans présenter à cette modification une résistance qui doit être surmontée par une force.

Nous désignons en effet par le nom de *force* toute cause qui est capable de mettre en mouvement un corps matériel immobile, ou d'altérer le mouvement actuel d'un tel corps. Or le mouvement d'un corps consiste, à proprement parler, dans le fait qu'une masse donnée se déplace actuellement avec une vitesse donnée. Lorsqu'on compare divers mouvements les uns aux autres, on se représente qu'un mouvement est d'autant plus grand : 1° que la masse qui se meut est plus grande ; 2° que la vitesse actuelle de cette masse est plus grande. Le produit de la masse par la vitesse est nommé *quantité de mouvement*, et considéré comme la mesure du mouvement. D'après cela, nous jugeons ainsi de la grandeur relative des forces, c'est-à-dire, des causes propres à produire ou altérer les mouvements, d'après la grandeur des quantités de mouvements qu'elles peuvent imprimer ou détruire.

Ainsi l'on définit une force en disant qu'elle est capable d'imprimer à une certaine masse telle vitesse. Et l'on voit que les forces deviennent de cette manière des quantités mesurables dont les valeurs relatives sont exprimées par des nombres. Le nombre qui représente

la valeur d'une force est le produit d'une masse par la vitesse que la force peut imprimer à cette masse.

On regarde d'après cela comme égales deux forces qui auront imprimé respectivement des quantités de mouvement telles que les masses seront dans chacune réciproquement proportionnelles aux vitesses. Or cette conclusion s'accordera effectivement avec les phénomènes naturels, car l'expérience apprend non-seulement que des masses égales qui viennent se choquer avec des vitesses égales détruisent réciproquement leurs mouvements, mais encore que lorsque des masses inégales viennent se choquer avec des vitesses en raison inverse des masses, les mouvements réciproques sont aussi complétement détruits. De plus, on s'assure que le développement d'un même ressort imprime toujours aux corps des vitesses d'autant plus grandes que les masses sont plus petites.

Pour donner une connaissance complète de la manière dont les forces se définissent et s'évaluent, il reste à remarquer que l'action de plusieurs forces naturelles, celle de la gravité, par exemple, est continue et même perpétuelle. Or, un corps soumis à l'action d'une telle force tend à acquérir une vitesse qui s'accroîtrait sans cesse. Par conséquent une force de cette nature ne peut être définie en disant seulement qu'elle est capable d'imprimer une vitesse donnée à une masse donnée; il faut nécessairement introduire dans la définition la considération du temps pendant lequel l'action de cette force s'exerce. C'est pourquoi la définition propre des forces dont il s'agit consiste à dire qu'elles sont capables d'imprimer telle vitesse à une masse donnée dans un temps donné. La force est regardée

comme d'autant plus grande que la masse et la vitesse sont plus grandes, et que le temps est plus petit. La valeur de la force est imprimée par le nombre qui représente le produit de la masse par la vitesse imprimée dans l'unité de temps.

La *gravité*, c'est-à-dire l'attraction mutuelle des corps, est de toutes les forces celle qui produit les phénomènes les plus généraux et les plus importants, et celle dont la nature et les effets nous sont les mieux connus. La nature de la gravité, que nous considérons ici seulement dans les effets qu'elle produit à la suface de la terre (nous la considérerons plus tard sous un point de vue plus étendu et plus exact) consiste : 1° en ce qu'elle affecte également toutes les parties matérielles en sorte qu'elle imprime à tous les corps identiquement la même vitesse; 2° en ce que son action continue et toujours égale s'exerce absolument de la même manière, quel que soit l'état de repos ou de mouvement actuel du corps. Un corps soumis à l'action de la gravité, soit qu'il parte du repos, soit qu'il se meuve dans une direction et avec une vitesse quelconque, acquerra toujours dans l'unité de temps et dans la direction de la verticale une même vitesse, c'est-à-dire que la vitesse avec laquelle il se meut actuellement augmentera toujours de la même quantité dans l'unité de temps. L'accroissement de vitesse que la gravité imprime aux corps est à Paris dans une seconde sexagésimale de $9^{m}80896$. Ce nombre étant assigné, la force dont il s'agit est définie.

Ce qui vient d'être dit doit être regardé comme prouvé par l'observation des faits. On verra plus tard comment s'établit la certitude des propositions énoncées.

Il n'est pas difficile de concevoir, d'après ce qui précède, comment s'expriment en nombres les valeurs relatives des masses que l'on est obligé d'introduire dans les formules de la dynamique. Considérant l'action de la gravité sur un même corps, cette action peut produire deux effets entièrement différents : 1° si le corps est maintenu immobile, l'effet produit consiste dans un effort ou pression exercé contre l'obstacle, et cette pression est mesurée par ce qu'on nomme le *poids* du corps, que nous représenterons par P, en sorte que P désigne un nombre de kilogrammes; 2° si, au contraire, le corps cède librement à l'action de la gravité, il acquerra dans l'unité de temps la vitesse de 9^{m}80896 par seconde : appelons *m* la masse du corps et *g* cette vitesse, *g* désignant un nombre de mètres, ou en général d'unités de longueur, le produit *mg* représentera la quantité de mouvement que la gravité fait acquérir au corps dans l'unité de temps et d'après ce qui a été dit, ce produit devra être pris pour la mesure de la force. Or cette force, c'est-à-dire cette cause identique agissant sur ce corps, produisant des effets différents, suivant que ce corps est libre ou retenu par un obstacle, est évidemment dans chaque cas mesurée et évaluée par les effets produits. Donc le nombre P ou le nombre *mg* sont également propres à exprimer la valeur de la force dont il s'agit : ces deux nombres sont donc nécessairement proportionnels l'un à l'autre. On peut même écrire $P = mg$, parce que les nombres P et *g* dépendent seuls d'unités convenues, c'est-à-dire des unités de poids, de longueur et de temps, car l'unité de masse demeure arbitraire, et l'on peut toujours la supposer choisie de manière à ce que

l'équation précédente subsiste. On déduit de cette équation $m = \frac{P}{g}$; le nombre qui exprime la masse d'un corps est donc le quotient du poids de ce corps par la vitesse que la gravité imprime aux corps pesants dans l'unité de temps. C'est d'après cette proposition que les formules de mécanique doivent être interprétées.

Réciproquement si l'on a appris par l'observation qu'un corps d'une masse m, mu par l'action d'une force quelconque, acquiert dans l'unité de temps la vitesse g, c'est-à-dire que la quantité de mouvement du corps augmente dans l'unité de temps de la qualité mg, on en conclura que si un obstacle quelconque obligeait le corps à conserver sa vitesse actuelle et s'opposait à l'accélération de mouvement que la force tend à produire, il serait exercé contre cet obstacle, dans la direction de la force, une pression représentée numériquement par le produit mg. Ce produit est la mesure du poids du corps, en tant que ce poids est le résultat de l'action de la force qui imprimerait aux parties matérielles la vitesse g dans l'unité de temps.

L'exactitude de ces dernières notions paraîtra certaine, si l'on remarque que l'on peut vérifier par le fait, en se transportant dans divers lieux de la terre, que la valeur g et le poids du corps varient dans le même rapport. On s'en assurerait en employant l'action du poids à comprimer des ressorts.

CHAPITRE PREMIER.

MOUVEMENT RECTILIGNE DES CORPS.

§ Ier.

Formules du mouvement rectiligne.

163. L'analyse mathématique donne les moyens d'exprimer facilement les lois des phénomènes qui appartiennent à la dynamique. Dans la géométrie on détermine communément la position d'un point en donnant ses distances x, y, z à trois plans rectangulaires supposés fixes. Admettons que ce point soit en mouvement et occupe successivement diverses positions dans l'espace : les distances x, y, z seront alors des quantités variables, dont les valeurs changent à mesure que le temps s'écoule, et qui sont par conséquent des fonctions du temps t qui s'est écoulé à partir d'un instant déterminé pris pour origine du temps ; si l'on connaît les valeurs de x, y, z en fonction t, on aura les moyens de déterminer la position du point à un instant quelconque, et par conséquent la nature de son mouvement sera entièrement connue.

Considérons d'abord le cas où un *point* matériel se meut en ligne droite, il est évident que, quelle que soit la nature du mouvement rectiligne, la force qui agit sur le point matériel agit dans le sens de la ligne droite que le point tend à parcourir. En conséquence, pour déterminer à chaque instant la position du point

matériel, il suffit de prendre une seule coordonnée à partir d'un point fixe et regardée comme une fonction du temps : en sorte qu'on a toujours $s = F(t)$, s étant l'espace parcouru.

Cela posé, le mouvement affecté par le corps, et dont la nature est exprimée par la fonction $F(t)$, est un résultat nécessaire de plusieurs circonstances: La valeur de la distance s, qui correspond à un temps quelconque t, dépend : 1° du lieu où le corps était placé à l'instant où l'on a commencé à compter le temps; 2° de la vitesse qu'il avait à cet instant ; 3° de la grandeur de la force constante ou variable avec le temps, par laquelle ce corps a été sollicité pendant toute la durée du temps t. Si l'on donnait la position et la vitesse initiale du corps, et l'expression en fonction du temps de la force qui le sollicite, on devrait pouvoir en conclure la forme de la fonction $F(t)$. Réciproquement, la fonction $F(t)$ étant déterminée, on en conclura la valeur de la vitesse du point matériel au bout d'un temps quelconque, et l'expression de la force qui produit le mouvement de ce point.

1° Quant à la vitesse qui a lieu au bout du temps t, on se rappellera que la vitesse est le rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir, ou l'espace parcouru pendant l'unité de temps. Désignée par Δt un certain temps écoulé après le temps t, et par Δs l'espace parcouru pendant ce temps, le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ représenterait donc la vitesse demandée si la valeur de ce rapport était constante, ou si Δs était proportionnel à Δt. Or en général, la valeur de ce rapport dépend de la grandeur absolue de l'accroissement Δt, et il est

visible que l'on ne peut ici attribuer aucune valeur finie déterminée à cet accroissement : 1° parce que cette valeur serait arbitraire ; 2° parce que ce serait faire dépendre la détermination de la vitesse qui a lieu au bout du temps t de la modification que peut subir le mouvement du point matériel après ce temps. Donc l'accroissement Δt doit être supposé plus petit que toute grandeur donnée ou infiniment petit ; c'est-à-dire qu'on doit prendre pour l'expression de la vitesse au bout du temps t, la limite dont s'approche $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ lorsque Δt tend à devenir égal à zéro, limite qui n'est autre chose que le coefficient différentiel $\frac{ds}{dt}$, en sorte que l'on a

$$\omega = \frac{ds}{dt} \text{ ou } \omega = \frac{dF(t)}{dt}.$$

La vitesse est représentée par le coefficient différentiel de premier ordre de l'expression analytique qui donne l'espace parcouru au bout du temps t, en fonction de ce temps.

2° Quant à la valeur de la force par laquelle le corps est sollicité au bout du temps t, on se rappellera que la force qui produit ou modifie le mouvement d'un corps, est mesurée par la quantité de mouvement que cette force imprime dans l'unité de temps, c'est-à-dire par le produit de la masse du corps multipliée par la quantité dont la vitesse de cette masse s'accroît dans l'unité de temps : soit en général Δt un certain temps écoulé à la suite du temps t, et $\Delta\omega$ l'accroissement reçu par la vitesse ω pendant ce temps. Le rapport $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ donnerait donc la vitesse acquise dans

l'unité de temps si la valeur de ce rapport était constante, ou si l'accroissement $\Delta\omega$ était proportionnel à Δt. Cette proportionnalité n'ayant pas lieu en général, les mêmes considérations, qui ont été exposées dans le numéro précédent, montrent que la vitesse acquise dans l'unité de temps, doit s'exprimer par la limite de $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$, lorsque Δt devient de plus en plus petit, c'est-à-dire, par le coefficient différentiel $\frac{d\omega}{dt}$, on a donc

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2s}{dt}=\frac{d^2F(t)}{dt},$$

pour l'expression de la vitesse que la force par laquelle le point matériel est sollicité à la fin du temps t, imprime à ce point matériel dans l'unité de temps. Ainsi cette vitesse est représentée par le coefficient différentiel de premier ordre de l'expression de la vitesse du point matériel en fonction du temps, ou par le coefficient différentiel du deuxième ordre de l'expression de l'espace parcouru en fonction du temps.

Si la masse du point matériel est désignée par m, la quantité de mouvement acquise par ce point dans l'unité de temps, sera donc

$$m\frac{d\omega}{dt}=m\frac{d^2s}{dt}=m\frac{d^2F(t)}{dt},$$

et par conséquent, ces expressions donnent en unités de poids l'effort exercé contre le point matériel, à la fin du temps t, par la force qui le sollicite.

164. Supposons d'abord que les espaces parcourus dans des temps égaux, sont égaux, auquel cas le *mouvement est uniforme* : alors l'espace croît proportionnellement au temps, et on a

$$\omega = \pm l \frac{\Delta s}{\Delta t} = \pm \frac{ds}{dt},$$

on prend le double signe pour que cette valeur puisse s'accorder avec la direction de la force qui agit sur le point de $\omega = \pm \frac{ds}{dt}$, on déduit $ds = \pm \omega dt$, et si l'on suppose que le corps commence à se mouvoir à partir d'un point fixe pour lequel $t=0, s=s_0$, l'intégration donnera $s=s_0 \pm \omega t$, c'est là *l'équation du mouvement uniforme*.

165. On appelle *mouvement uniformément varié*, celui d'un corps déjà en mouvement uniforme et sollicité par une force constante, agissant dans la direction du mouvement primitif ou en sens contraire; dans le premier cas, le mouvement est accéléré, et dans le deuxième, il est retardé.

Si on applique une force à un point libre, celui-ci acquiert une certaine vitesse qui croît par degrés insensibles, de manière à avoir dans un temps fini une valeur finie; on a cru que dans le choc des corps, les vitesses étaient instantanées, mais des expériences plus exactes ont prouvé que dans la nature il n'y a pas de vitesse communiquée instantanément à un corps : ces vitesses sont d'abord infiniment petites, et croissent de manière qu'elles soient finies après un temps déterminé.

Revenons au mouvement uniformément varié. Soit ω_0 la vitesse initiale du corps, ω la vitesse finale après le temps t compté, à partir de l'instant où la force constante commence à agir. Or, une force constante P, qui agit sur une masse m, lui communique une certaine vitesse g que le corps a acquise à la fin du

premier instant; pendant le second instant, la vitesse acquise se conservera dans le corps en vertu de son inertie; mais la force P produit dans cet instant la même vitesse que dans le premier instant; ainsi, après le deuxième instant, la vitesse acquise sera $2g$, et en général après t instants, elle sera gt : donc, en admettant que les vitesses s'ajoutent, on aura $\omega=\omega_0\pm gt$: le double signe se rapporte à la direction de la force P, par rapport au mouvement primitif, on a d'ailleurs

$$\omega=\pm\frac{ds}{dt},$$

ainsi

$$\frac{ds}{dt}=\pm(\omega_0\pm gt),$$

et par suite

$$s=s_0\pm\left(\omega_0 t\pm\frac{gt^2}{2}\right);$$

telle est l'*équation du mouvement uniformément varié*. On peut aussi exprimer la vitesse en fonction de l'espace parcouru : en effet, $\omega=\omega_0\pm gt$ et $\omega=\pm\frac{ds}{dt}$: de ces deux équations il faut éliminer t : en différentiant il vient

$$d\omega=\pm gdt,\ dt=\pm\frac{ds}{\omega},$$

d'où

$$d\omega=\pm g\frac{ds}{\omega},$$

et par suite en intégrant

$$\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2}=\pm g(s-s_0),$$

ou bien

$$\omega^2=\omega_0^2\pm 2g(s-s_0).$$

On peut parvenir à cette équation d'une autre manière, car l'équation

$$s = s_0 \pm \left(\omega_0 t \pm \frac{gt^2}{2}\right)$$

peut se mettre sous la forme

$$s - s_0 = \pm t\left(\omega_0 \pm \frac{gt}{2}\right),$$

d'ailleurs, $\omega = \omega_0 \pm gt$, donne

$$\pm t = \frac{\omega - \omega_0}{g},$$

substituant, il vient

$$s - s_0 = \pm \frac{\omega - \omega_0}{g}\left(\omega_0 \pm \frac{\omega - \omega_0}{2}\right) = \frac{\omega - \omega_0}{g}\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2g}$$

ou

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm 2g(s - s_0).$$

Nous avons donc deux équations, l'une donnant l'espace parcouru en fonction du temps, l'autre, la vitesse en fonction de l'espace ou du temps, car la quantité $s - s_0$ peut être facilement remplacée par sa valeur en fonction du temps.

166. Si la force P et la masse m varient, la vitesse g varie aussi, et l'on a en général $g = F(P, m)$; mais si P et m se changent en 2P et $2m$, rien ne sera changé, car chaque masse m conservera sa vitesse g, qui sera celle de la masse totale : ainsi $g = F\left(\frac{P}{m}\right)$, et $\frac{P}{m}$ est ce que l'on nomme la *force accélératrice*, que l'on représente par φ. Si $\varphi =$ *const.*, on est dans le cas du mouvement uniformément varié : pour deux forces P et P', on a

$$P = m\varphi,\ P' = m\varphi',$$

d'où

$$P : P' :: \varphi : \varphi' ;$$

on admet que les forces sont proportionnelles aux vitesses, ce qui n'est nullement prouvé, alors

$$g:g'::P:P'::\varphi:\varphi' \text{ ou } \frac{\varphi}{\varphi'}=\frac{g}{g'},$$

c'est là ce qu'on appelle la *proportionnalité des forces aux vitesses*. Si on prend pour unité de force accélératrice φ', qui correspond à l'unité de vitesse g', on a $\varphi=g$. Ainsi nous prendrons pour *unité de force accélératrice*, la force qui dans l'unité de temps meut l'unité de masse avec l'unité de vitesse : alors la fonction $g=f\left(\frac{P}{m}\right)$ devient

$$\varphi=g=\frac{P}{m}.$$

167. Si on laisse tomber divers corps dans le vide, leur vitesse est la même quelle que soit leur masse, donc *les forces accélératrices sont indépendantes de la masse*. La force motrice prend alors le nom de poids, et est représentée par gm. L'expérience prouve que pendant 1″ un corps pesant parcourt $4^m,49044$; or, $s=\frac{gt^2}{2}$, si $t=1''$, $g=2\times4,9088=9,8088$: donc *la force accélératrice est le double de l'espace parcouru*.

168. Nous venons de considérer le mouvement d'un corps soumis à l'action d'une force agissant constamment sur lui avec la même intensité, occupons-nous maintenant du mouvement d'un corps sollicité par une force dont l'intensité varie avec le temps : le mouvement qui a lieu dans ce cas s'appelle *mouvement varié*. En désignant la force dont il s'agit par P, on aura $P=f(t)$, et pour la force accélératrice

$$\varphi=\frac{P}{m}=F(t)\;;$$

donnons au temps t un accroissement infiniment petit Δt, il en résultera un accroissement $\Delta\omega$ pour la vitesse : si la force accélératrice était constante et égale à φ, on aurait

$$\varphi=\pm\frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

mais cette force varie d'intensité dans l'instant Δt; donc si φ_1 et φ_2 représentent les valeurs maximum et minimum de cette force durant l'instant Δt, il est clair que $\pm\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ sera plus petit que φ_1 et plus grand que φ_2; on peut poser

$$\pm\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\mathrm{F}(t+\theta\Delta t),$$

passant aux limites il vient

$$\pm d\omega=\mathrm{F}(t)dt=\varphi dt=\frac{\mathrm{P}}{m}dt\,;$$

on a d'ailleurs

$$\omega=\pm\frac{ds}{dt}$$

d'où

$$2m\omega d\omega=d(m\omega^2)=\pm 2pds,$$

$m\omega^2$ est ce qu'on nomme la *force vive de la masse*. on déduit de là

$$m\omega^2-m\omega_0^2=\pm 2\int_{s_0}^{s}pds.$$

§ II.

Exemples du mouvement rectiligne.

169. Supposons que la force φ soit constante et qu'il s'agisse, par exemple, du mouvement vertical d'un corps

qui tombe dans le vide en vertu de la pesanteur. La pesanteur est en effet une force constante lorsque les espaces parcourus sont très - petits par rapport au rayon de la terre.

Le corps tombant vers le centre de la terre, le mouvement est uniformément accéléré, et on a, d'après ce que nous avons vu dans le § précédent, les deux équations

$$s=s_0\pm\left(\omega_0 t\pm\frac{gt^2}{2}\right)$$

et

$$\omega^2=\omega_0^2\pm 2g(s-s_0),$$

qui deviennent, en supposant l'espace parcouru compté dans le sens du mouvement,

$$s=s_0+\left(\omega_0 t+\frac{gt^2}{2}\right),\quad \omega^2=\omega_0^2+2g(s-s_0),$$

s_0, ω_0 pouvant avoir diverses valeurs.

Si on suppose

$$\omega_0=0,\ s_0=0,\quad \text{alors}\quad \omega^2=2gs;$$

si l'on appelle a la vitesse acquise en tombant d'une hauteur h, on aura

$$a=\sqrt{2gh},$$

ce qui fournit une expression commode d'une vitesse quelconque, au moyen de la hauteur d'où un corps pesant devrait tomber pour l'acquérir, et de la vitesse constante g.

Si le corps avoit déjà un mouvement en sens inverse de la pesanteur au moment où cette dernière commence à agir sur lui, le mouvement est retardé. Si l'on compte les espaces parcourus dans le sens de

la vitesse initiale, et par conséquent en sens contraire du mouvement, il vient

$$s = s_0 - \left(\omega_0 t - \frac{gt^2}{2}\right),\ \omega^2 = \omega_0^2 - 2g(s - s_0):$$

pour avoir l'instant ou le point où la vitesse d'un corps, lancé par exemple de bas en haut, devient nulle, il suffit de poser

$$s_0 = 0 \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = 2gs,$$

ce qui montre que cela a lieu lorsque l'espace parcouru s est tel qu'un corps pesant tombant librement sans vitesse initiale, le parcourrait dans le même temps que le mobile dont il s'agit, *c'est-à-dire qu'un corps pesant lancé du bas en haut, s'élève dans le vide à la hauteur d'où il devrait tomber pour acquérir cette même vitesse, et que le temps de son élévation est le même que celui de sa chute.*

Admettons que la pesanteur cesse d'agir sur un corps pesant tombant vers la terre, et que d'ailleurs

$$s_0 = 0,\ \omega_0 = 0,$$

alors

$$s = \frac{gt^2}{2},\ \omega^2 = 2gs;$$

Si la pesanteur cesse d'agir seulement après un temps t, le corps parcourra dans le même temps un espace $s' = gt^2$, c'est-à-dire, double du premier.

170. Soit que le mobile monte ou descende sur un incliné, il suffira pour avoir les équations de son mouvement de mettre $g \sin.\theta$ à la place de g, désignant par θ l'angle du plan incliné avec l'horizon. Dans le cas de la chute on aura donc

$$\omega = gt \sin.\theta,\ s = \frac{gt^2 \sin.\theta}{2},\ \omega^2 = 2gs.\sin.\theta,$$

Ainsi, en appelant l la longueur du plan incliné, h sa hauteur, et K la vitesse acquise par le mobile, quand il aura parcouru toute cette longueur on aura

$$K^2 = 2gls\sin.\theta = 2gh,$$

ce qui montre que si l'on a *plusieurs plans inclinés aboutissant au même plan horizontal, un même corps les parcourra tous en conservant la même vitesse finale.*

171. Soit AD le diamètre vertical d'un cercle ABD : si l'on pose Fig. 48.

$$AB = l, \ AC = h,$$

et si l'on désigne par t le temps qu'un mobile met à parcourir la corde AB, on aura, d'après ce qui précède,

$$l = \frac{g\sin.\theta t^2}{2},$$

d'où

$$\frac{l}{\sin.\theta} = \frac{gt^2}{2};$$

or,

$$\frac{l}{\sin.\theta} = AD,$$

ainsi

$$AD = \frac{gt^2}{2}:$$

mais $g\frac{t^2}{2}$ représente l'espace qu'un mobile aurait parcouru verticalement dans le temps t. AD est donc l'espace vertical que le corps parcourrait dans le temps t qu'il met à parcourir AB. Dailleurs, ce que nous avons dit de AB, s'applique à une corde quelconque partant du point A : donc *toutes les cordes inscrites*

dans un même cercle, à partir de l'extrémité d'un diamètre vertical, sont décrites dans le même temps par des mobiles partant de cette extrémité.

Passons maintenant au mouvement rectiligne d'un corps pesant.

Fig. 49. **172.** 1° Lorsque l'intensité de la pesanteur varie en raison inverse du carré des distances à un point fixe et que le mouvement se fait dans le vide.

Soit NN′ un grand cercle vertical de la terre, A le point de départ du mobile dans ce plan, B sa position au bout du temps t, sur la droite AO qui aboutit au centre O de la terre; soit g l'intensité de la pesanteur à la surface de la terre, R le rayon de celle-ci, s l'espace parcouru dans le temps t, φ l'action de la pesanteur après ce temps, on a

$$\frac{d\omega}{dt}=\varphi=\frac{gR^2}{(r_0-s)^2}.$$

(car $g:\varphi::(r_0-s)^2:R^2$) et $\omega=\dfrac{ds}{dt}$: multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on a

$$2\omega\, d\omega=2gR^2\frac{ds}{(r_0-s)^2}:$$

intégrant à partir du point de départ, il vient

$$\omega^2=\int_0^s 2gR^2\frac{ds}{(r_0-s)^2}=2gR^2\left(\frac{1}{r_0-s}-\frac{1}{r_0}\right);$$

Quand le point matériel aura parcouru la moitié de la distance r_0

$$s=\frac{1}{2}r_0$$

et

$$\omega^2 = \frac{2gR^2 s}{r_0(r_0 - s)};$$

mais alors

$$s = \frac{r_0}{2} = r_0 - s,$$

désignant par a^2 le carré de la vitesse acquise au milieu, on a

$$a^2 = \frac{2gR^2}{r_0},$$

et par suite

$$\omega^2 = a^2 \times \frac{s}{r_0 - s} = \frac{a^2 s}{r_0 - s}.$$

Si l'on considère un espace parcouru dans un temps très-court, l'espace s est très-petit

$$\omega^2 = \frac{a^2 s}{r_0 - s} = \frac{a^2 s}{r_0},$$

or,

$$a^2 = \frac{2gR^2}{r_0}$$

Ainsi

$$\omega^2 = \frac{2gR^2}{r_0^2}:$$

pesant

$$\frac{gR^2}{r_0^2} = g', \quad \omega^2 = 2g's:$$

donc, *dans les premiers moments de la chute, le mouvement est uniformément accéléré.*

Cherchons maintenant une relation entre le temps et l'espace parcouru, ou la vitesse acquise au bout de ce temps; or, nous avons

$$\omega = \frac{ds}{dt}, \quad \text{d'où} \quad dt = \frac{ds}{\omega}:$$

intégrant par parties à partir de $t=o$, il vient

$$t=\frac{s}{\omega}-\frac{s_0}{\omega_0}+\int_{\omega_0}^{\omega} s\,\frac{d\omega}{\omega^2}:$$

mais de l'équation

$$\omega^2=\frac{a^2 s}{r_0-s} \quad \text{on tire} \quad s=\frac{\omega^2 r_0}{\omega^2+a^2};$$

on a donc

$$\frac{s}{\omega}=\frac{\omega r_0}{\omega^2+a^2},\ \frac{s_0}{\omega_0}=\frac{\omega_0 r_0}{\omega_0^2+a^2}=0,$$

puisque s_0 et ω_0 ne sont autre chose que l'espace et la vitesse à l'origine du mouvement. On déduit de là

$$t=\frac{\omega r_0}{\omega^2+a^2}+r_0\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{\omega^2+a^2}=\frac{\omega r_0}{\omega^2+a^2}+\frac{r_0}{a}\ \text{arc tang.}\ \frac{\omega}{a};$$

les deux équations du mouvement sont donc

$$\omega^2=\frac{a^2 s}{r_0-s},\ t=\frac{\omega r_0}{\omega^2+a^2}+\frac{r_0}{a}\ \text{arc tang.}\ \frac{\omega}{a}.$$

173. 2° Lorsque l'intensité de la pesanteur varie en raison directe de la distance à un point fixe.

C'est ce qui a lieu pour un corps en mouvement dans l'intérieur de la terre. Dans ce cas, on a

$$\frac{d\omega}{dt}=\varphi=\frac{g}{R}(R-s),\ \omega=\frac{ds}{dt},$$

d'où

$$2\omega d\omega=\frac{2g}{R}(R-s)\,ds,\quad \omega^2=\frac{g}{R}(2R-s)\,s,$$

et par suite

$$s=R\pm\sqrt{R\,\frac{(gR-\omega^2)}{g}}$$

ou en substituant pour ω sa valeur $\frac{ds}{dt}$

$$(gR)^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{R\,ds}{\sqrt{s(2R-s)}}=\frac{R\,ds}{\sqrt{R^2-(s-R)^2}}$$

et

$$(gR)^{\frac{1}{2}} = R \quad \text{arc cos.} \quad \frac{R-s}{R};$$

tirant la valeur de s, on obtient

$$s = R\left\{1 - \cos.\left(t\,\frac{\sqrt{R}}{g}\right)\right\}:$$

ou bien, en représentant par z la distance du mobile au centre fixe,

$$z = r - s = r\cos.t\sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Si dans cette valeur on donne successivement à t les valeurs

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}},\ \pi\sqrt{\frac{R}{g}},\ \text{etc.},$$

les valeurs de z correspondantes sont $z=0$, $z=-R$, etc., tandis que celles de s sont $s=R$, $s=-R$, etc. : ce qui montre que la distance z sera nulle, ou que le mobile atteindra le centre d'attraction (ici le centre de la terre), au bout d'un temps égal à $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$: il fera ensuite de part et d'autre de ce centre des oscillations dont l'amplitude et la durée constantes seront la distance ou rayon R et le temps $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

174. 3° Lorsqu'on a égard à la résistance du milieu, la pesanteur étant supposée constante.

Si le corps se meut en sens contraire de la pesanteur, ou de bas en haut, m étant la masse du corps, g l'action constante de la pesanteur, et $f(\omega)$ la résistance du milieu, la valeur de la force motrice P sera $gm+f(\omega)$, et on aura

$$\frac{d\omega}{dt} = -\left(\frac{gm+f(\omega)}{m}\right) = -\left(g+\frac{f(\omega)}{m}\right),$$

d'où, en intégrant,

$$\omega-\omega_0 = -\int_0^t \left(g+\frac{f(\omega)}{m}\right) dt\,;$$

$f(\omega)$ étant nécessairement une quantité positive, il est évident que le deuxième membre est plus grand que gt, abstraction faite du signe. Ainsi, *la vitesse du mobile sera plutôt nulle que s'il se mouvait dans le vide*, ce qu'on pouvait prévoir.

Si le corps descend et se meut dans le sens de la pesanteur, on a

$$\frac{d\omega}{dt} = g - \frac{1}{m}f(\omega) \quad \text{d'où} \quad \omega-\omega_0 = \int_0^t \left(g-\frac{1}{m}f(\omega)\right) dt.$$

Supposons que $f(\omega)$ croisse ou décroisse indéfiniment avec ω, on verra que ω ne pourra croître ou décroître au delà de toute limite. En effet, si $\frac{1}{m}\,f(\omega)$ devient égal à g, l'accroissement de la vitesse à cette époque du mouvement sera nul, et il n'y aura plus de raison pour que ω change de valeur. Cela posé, supposons d'abord que $g-f\left(\frac{\omega}{m}\right)$ soit positif ; alors ω croîtra sans cesse, et par suite $f\left(\frac{\omega}{m}\right)$ croîtra indéfiniment, ce qui ne peut être, car il faudrait pour cela que $g-f\left(\frac{\omega}{m}\right)$ devînt négatif, ce qui exigerait que cette quantité passât par zéro, et nous avons vu que, dès l'instant où cela aurait lieu, ω ne pourrait plus varier. Soit k

la plus petite valeur de $g-f\left(\frac{\omega}{m}\right)$, il est évident que $\omega-\omega_0>kt$, et cela quelle que soit la valeur de t; il faut donc que $k=0$, c'est-à-dire que la limite de ω sera donnée par $f(\omega)=mg$. Si $g-f\left(\frac{\omega}{m}\right)$ est négatif, on aura

$$\omega=\omega_0-\int_0^t\left(\frac{f(\omega)}{m}-g\right)dt:$$

il est encore évident que ω ne pourra décroître au delà de toute limite; car alors $\frac{1}{m}f(\omega)-g$ changerait de signe, ce qui ne peut avoir lieu. Soit encore k la plus petite valeur de $f\left(\frac{\omega}{m}\right)-g$, on aura

$$\omega_0-\omega<kt,$$

quelle que soit la valeur de t. Si k différait de zéro, il faudrait donc que $\omega=-\infty$ au bout d'un temps infini, ce qui est inadmissible; on a donc $k=0$, et la limite de ω est donnée par $f(\omega)=mg$.

175. Jusqu'à présent nous avons laissé indépendante la valeur de $f(\omega)$: supposons maintenant que la résistance du milieu est proportionnelle au carré de la vitesse, et, en outre, que le milieu a partout la même densité, afin que la force accélératrice ne dépende que de la vitesse. Pour fixer les idées, nous admettrons que le mobile est une sphère homogène.

Le rayon de cette sphère pesante étant R, ρ sa densité moyenne, et m sa masse, on a $m=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$. Si, après un temps t, elle se meut pendant l'intervalle Δt, en appelant D la densité constante du milieu, μ la masse de fluide déplacé, le volume de ce dernier sera

$$\iint (z-z_0)dxdy = z-z_0 \iint dxdy = \Delta t.\pi R^2\omega,$$

d'où

$$\mu = \Delta t \pi R^2 D\omega,$$

et par suite la quantité de mouvement correspondante à cette masse sera

$$\mu\omega = \pi R^2 \omega^2 D \Delta t :$$

or, des considérations théoriques confirmées par l'expérience ont prouvé que la résistance $f(\omega)$ est proportionnelle à la quantité de mouvement $\mu\omega$; on a donc

$$\frac{f(\omega)}{m} = \text{const.} \times \frac{3}{4} \frac{\Delta t.D\omega^2}{R\rho} = \frac{a.D}{R\rho}\omega^2,$$

en faisant entrer $\frac{3}{4}\Delta t$ dans la constante a. Si on pose encore

$$\frac{aD}{gR\rho} = b^2;$$

il viendra

$$\frac{f(\omega)}{m} = gb^2\omega^2,$$

ou

$$\frac{f(\omega)}{mg} = b^2\omega^2.$$

Cela posé, s'il s'agit du mouvement ascensionnel,

$$\frac{d\omega}{dt} = -\left((g+\frac{f(\omega)}{m}\right) = -g\left(1+\frac{f(\omega)}{mg}\right) = -g(1+b^2\omega^2),$$

ou

$$\frac{d\omega}{1+b^2\omega^2} = -gdt,$$

ou bien

$$\frac{bd\omega}{1+b^2\omega^2} = -bgdt :$$

l'intégration donne

$$\text{arc tang. } b\omega - \text{arc tang. } b\omega_0 = -gbt,$$

ou

$$b\omega = \text{tang.}(\text{arc tang. } b\omega_0 - gbt) = \frac{b\omega_0 - \text{tang.}(bgt)}{1 + b\omega_0 \text{ tang.}(bgt)};$$

telle est la relation qui existe entre le temps et la vitesse. Il reste à établir une deuxième équation entre l'espace et la vitesse ; or nous avons

$$\frac{d\omega}{1+b^2\omega^2} = -gdt, \ \omega = \frac{ds}{dt}:$$

multipliant ces deux équations, on obtient

$$\frac{\omega d\omega}{1+b^2\omega^2} = -gds,$$

ou

$$\frac{2b^2\omega d\omega}{1+b^2\omega^2} = -2b^2gds,$$

et, en intégrant,

$$l(1+b^2\omega^2) - l(1+b^2\omega_0^2) = -2b^2gs:$$

on déduit de là

$$l\left(\frac{1+b^2\omega^2}{1+b^2\omega^2}\right) = -2b^2gs,$$

ou bien

$$\frac{1+b^2\omega^2}{1+b^2\omega_0^2} = e^{-2b^2gs}.$$

Nous désignons ici par l un logarithme, et par e la base du logarithme néperien, $e=2.7182818$.

Pour avoir l'espace parcouru, il suffit de trouver la valeur de s correspondante à $\omega=0$; on a donc

$$s = \frac{l(1+b^2\omega_0^2)}{2gb^2}.$$

Considérons enfin le mouvement de haut en bas; dans ce cas

$$\frac{d\omega}{dt}=g-\frac{f(\omega)}{m}=g\left(1-\frac{f(\omega)}{mg}\right)=g(1-b^2\omega^2),$$

ou

$$\frac{d\omega}{1-b^2\omega^2}=gdt,$$

ou bien

$$\frac{2bd\omega}{1-b^2\omega^2}=2bgdt:$$

or, le premier membre de cette équation revient à

$$\frac{bd\omega}{1+b\omega}+\frac{bd\omega}{1-b\omega};$$

on a donc

$$\left(\frac{b}{1+b\omega}+\frac{b}{1-b\omega}\right)d\omega=2bgdt:$$

en intégrant, on obtient évidemment

$$l(1+b\omega)-l(1-b\omega)-\left\{l(1+b\omega_0)-l(1-b\omega_0)\right\}=2bgt,$$

c'est-à-dire,

$$l\left(\frac{1+b\omega}{1-b\omega}\right)-l\left(\frac{1+b\omega_0}{1-b\omega_0}\right)=2gbt.$$

Si l'on fait $\omega_0=0$, auquel cas la vitesse initiale est nulle, il vient

$$l\left(\frac{1+b\omega}{1-b\omega}\right)=2gbt,$$

ce qui revient à

$$\frac{1+b\omega}{1-b\omega}=e^{2gbt},$$

d'où

$$b\omega=\frac{e^{2gbt}-1}{e^{2gbt}+1}.$$

Cherchons actuellement une relation entre l'espace et la vitesse ; pour cela éliminons t au moyen des équations

$$\frac{d\omega}{1-b^2\omega^2}=gdt,\ \omega=\frac{ds}{dt}:$$

en multipliant ces deux équations, il vient d'abord

$$\frac{\omega d\omega}{1-b^2\omega^2}=gds,$$

ou bien

$$\frac{2\,b^2\omega d\omega}{1-b^2\omega^2}=2b^2gds,$$

et l'intégration donne

$$-\left\{l(1-b^2\omega^2)-l(1-b^2\omega_0^2)\right\}=2gb^2s\,;$$

le signe moins provient de ce que

$$\frac{2b^2\omega d\omega}{1-b^2\omega^2}=d.\ \frac{b^2\omega^2}{1-b^2\omega^2}=-\left(-d.\frac{b^2\omega^2}{1-b^2\omega^2}\right)=-l(1-b^2\omega^2)\,;$$

Si $\omega_0=0$, alors

$$l(1-b^2\omega^2)=-2gb^2s,$$

ou

$$1-b^2\omega^2=e^{-2gb^2s},$$

ou bien

$$b^2\omega^2=1-e^{-2gb^2s}.$$

176. Comparons maintenant nos deux formules, et voyons ce qu'elles contiennent ; la première

$$b\omega=\frac{e^{2gbt}-1}{e^{2gbt}+1}$$

revient à

$$\omega=\frac{1-e^{-2gbt}}{b(1+e^{-2gbt})},$$

et la deuxième est

$$b^2\omega^2 = 1 - e^{-2gb^2s},$$

ou

$$\omega^2 = \frac{1}{b^2}(1 - e^{-2gb^2s})\,;$$

on voit que si s et t augmentent indéfiniment, la vitesse ω s'approche sans cesse de la limite $\frac{1}{b} = \Omega$, et que le mouvement tend à devenir uniforme, résultat qui s'accorde avec celui auquel nous sommes parvenus lorsque la nature de $f(\omega)$ était encore inconnue.

Éliminons ω pour avoir une relation entre l'espace parcouru et le temps. Or, de

$$b^2\omega^2 = 1 - e^{-2gb^2s}$$

on tire

$$(1 - b\omega)\,(1 + b\omega) = e^{-2gb^2s}.$$

Si le mobile est un corps léger, ω approche bientôt de la limite $\frac{1}{b}$. Posons donc $1 - b\omega = \varepsilon$ (ε étant une très-petite quantité), alors

$$1 + b\omega = 2 - \varepsilon,$$

et l'équation précédente devient

$$2\varepsilon - \varepsilon^2 = e^{-2gb^2s}\,; \qquad (a)$$

de même en introduisant ε dans

$$\omega = \frac{1}{b}\left(\frac{1 - e^{-2gbt}}{1 + e^{-2gbt}}\right),$$

on obtient

$$\varepsilon = \frac{2e^{-2gbt}}{1 + e^{-2gbt}}$$

et

$$2 - \varepsilon = \frac{2}{1 + e^{-2gbt}}\,;$$

on tire de là

$$\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}=e^{2gbt};$$

en multipliant cette équation par l'équation (a), on obtiendra

$$(2-\varepsilon)^2=e^{2gb(t-bs)};$$

ε étant très-petit, on peut le négliger, et il reste

$$2^2=e^{2gb(t-bs)},$$

d'où

$$2l.2=2gb(t-bs);$$

donc on a à peu près

$$s=\frac{1}{b}\left(t-\frac{2l.2}{gb}\right),$$

relation cherchée.

On peut avoir une relation plus rigoureuse entre s et t; en effet, des deux équations

$$\omega=\frac{1}{b}\left(\frac{1-e^{-2gbt}}{1+e^{-2gbt}}\right),\ b^2\omega^2=1-e^{-2gb^2s},$$

tirons les valeurs de $b^2\omega^2$; en égalant ces valeurs, il viendra

$$(1)\quad 1-e^{-2gb^2s}=\frac{(1-e^{-2gbt})^2}{(1+e^{-2gbt})^2}:$$

mais comme l'équation entre s et t sert principalement à trouver la constante b, cette dernière équation donne la valeur de b en expression transcendante, tandis que la relation précédente donne pour b une valeur finie. Du reste, on peut employer l'équation du deuxième degré pour avoir une valeur approchée de b, et par la substitution dans la valeur précédente on obtient une relation plus exacte. En général, si on a

$F(u)=0$, et que b soit une valeur approchée de u, on a

$$F(b+\varepsilon)=F(b)+\xi F(b+\theta\varepsilon)=0,$$

d'où

$$\varepsilon=\frac{F(b)}{F(b+\theta\varepsilon)};$$

θ et ε étant des quantités très-petites, $F(b+\theta\varepsilon)$ diffère peu de $F(b)$. Cette méthode a l'avantage de faire connaître la limite de l'erreur en faisant $\theta=0$, $\theta=1$.

L'équation (1) donne aussi immédiatement

$$b^2-\frac{t}{s}\,b+\frac{l.2}{gs}=0,$$

en effet, elle peut se réduire à

$$1-e^{-2gb^2s}=(1-e^{-2gbt})^2\,(1+e^{-2gbt})^{-2};$$

développant et ne prenant que les premières puissances de e^{-2gbt}, il vient

$$1-e^{-2gb^2s}=(1-4e^{-2gbt});$$

d'où

$$e^{-2gb^2s}=4\,e^{2gbt},$$

ou

$$2gb^2s=-2l.2+2gbt,$$

ou bien

$$b^2-\frac{t}{s}\,b+\frac{l.2}{gs}=0,$$

et c'est là l'équation trouvée plus haut.

§ III.

Mouvement rectiligne de plusieurs corps agissant les uns sur les autres. Expression de la force vive du système.

177. Considérons plusieurs points matériels A, A', A'', etc., se mouvant suivant l'axe des x en vertu des forces attractives ou répulsives qu'ils engendrent ;

cette manière de poser les données de la question n'ôte rien à sa généralité, car nous pouvons toujours remplacer les corps par les centres de gravité où on concentre leurs masses.

Soient x, x', x'', etc., les coordonnées variables de ces points, m, m', m'', etc., leurs masses respectives, et $\omega, \omega', \omega''$, etc., leurs vitesses. Désignons en outre par R, R', R'', etc., les forces attractives ou répulsives de ces points, et par P, P', P'', etc., les forces moléculaires résultantes qui agissent sur chacun d'eux.

Les équations du mouvement du point A seront

$$m\frac{d\omega}{dt} = \pm P, \frac{ds}{dt} = \pm \omega$$

(P est de la forme $P = \pm R \pm R' \pm$, etc.); on peut écrire ces formules autrement, car on a

$$\pm s = x - x_0 \quad \text{et} \quad \pm ds = dx;$$

ainsi

$$m\frac{d\omega}{dt} = \pm P, \omega = \pm \frac{dx}{dt}; \qquad (1)$$

dans la valeur de ω il faut prendre le signe plus ou le signe moins, suivant que le point se meut dans le sens de la vitesse, ou en sens contraire. Quant au signe de P, mettant pour ω sa valeur en x, il vient

$$d\omega = \pm \frac{d^2x}{dt}, m\frac{d^2x}{dt^2} = \pm P; \qquad (2)$$

on prendra le signe plus ou moins suivant que la force P est dirigée dans le sens des x positifs ou négatifs; car si, par exemple, la force est dirigée dans le sens des x positifs, on devra prendre le signe plus dans (1), alors (2) sera positif. Désignons les valeurs absolues de P, P', P'', etc., par X, X', X'', etc., alors on aura

$$(a)\quad m\frac{d^2x}{dt^2}=X=\pm R\pm R', \text{ etc.},$$

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2}=X'=\pm R\pm R', \text{ etc.},$$

$$m''\frac{d^2x''}{dt^2}=X''=\pm R'\pm R'', \text{ etc.}:$$

en intégrant ces équations, on aurait les équations du mouvement de chaque point. Généralement cette intégration ne pourra se faire, mais on peut tirer de ces équations quelques conséquences importantes.

Ajoutons ensemble, et membre à membre, les équations (a), il vient ainsi

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m'\frac{d^2x'}{dt^2}+\ldots\text{etc.}=X+X'+\ldots=0\,;$$

en intégrant, on obtient

$$(b)\quad m\frac{dx}{dt}+m'\frac{dx'}{dt}+\ldots=\text{const.}:$$

Soient ω_0, ω'_0, etc., les vitesses à l'origine du mouvement aux points A, A′, etc., on aura

$$\frac{dx}{dt}=\omega_0,\ \frac{dx'}{dt}=\omega'_0, \text{ etc.};$$

donc en mettant pour

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dx'}{dt}, \text{ etc.},$$

leurs valeurs dans l'équation (b)

$$m\frac{dx}{dt}+m'\frac{dx'}{dt}+\ldots\text{ etc.}=m\omega_0+m'\omega'_0+\ldots\text{etc.}:$$

or, on sait que si ξ est l'abscisse du centre de gravite d'un système de masses m, m', m'', etc., séparées par les

distances $x-x'$, $x'-x''$, etc., la position de ce centre de gravité sur l'axe des x est donnée par l'équation

$$mx+m'x'+m''x''+\text{etc.}=(m+m'+m''+\ldots)\xi;$$

différentiant, il vient

$$m\frac{dx}{dt}+m'\frac{dx'}{dt}+\ldots=(m+m'+\ldots)\frac{d\xi}{dt},$$

donc, en vertu de (b)

$$(m+m'+m''+\text{etc}\ldots)\frac{d\xi}{dt}=m\omega_0+m'\omega'_0+\ldots,$$

ou

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{m\omega_0+m'\omega'_0+\ldots}{m+m'+\ldots},$$

$\frac{d\xi}{dt}$ est la vitesse que prendrait le centre de gravité si les points étaient simplement sollicités par les vitesses $\omega_0, \omega'_0\ldots$, ainsi que la vitesse du même centre de gravité lorsque les points matériels sont sollicités à la fois par les vitesses initiales et les forces moléculaires : si donc ω_0, ω'_0, etc., sont des constantes, la vitesse du centre de gravité sera constante, et son mouvement uniforme. D'où résulte ce théorème : *lorsque des mobiles se meuvent en vertu de vitesses initiales constantes et de leurs attractions ou répulsions, le centre de gravité du système se meut d'un mouvement uniforme avec une vitesse constante, et qui par conséquent n'est pas altérée, quels que soient les effets des forces moléculaires.*

178. On appelle *force vive* d'un point matériel, ou plus généralement d'un corps dont tous les points ont la même vitesse, le produit de sa masse par le carré de cette vitesse.

Nous avons établi l'équation

$$m\frac{dx}{dt}+m'\frac{dx'}{dt}+\ldots=m\omega+m'\omega'+\ldots=m\omega_0+m'\omega'_0+\ldots\text{etc.};$$

de même en multipliant les équations (a) respectivement par

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dx'}{dt},\ \text{etc.},$$

il vient

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+m'\frac{d^2x'}{dt^2}\frac{dx'}{dt}+\text{etc.}=\pm\mathrm{R}\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)$$
$$\pm\mathrm{R}'\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx''}{dt}\right),\ \text{etc.};$$

d'ailleurs des équations

$$\omega^2=\frac{dx^2}{dt^2},\ \omega'^2=\frac{dx'^2}{dt^2},\ \text{etc.}$$

on déduit

$$\omega d\omega=\frac{d^2x}{dt^2}dx,\ \omega' d\omega'=\frac{d^2x'}{dt^2}dx',\ \text{etc.},$$

ou

$$m\omega d\omega=m\frac{d^2x}{dt^2}dx,\ m'\omega' d\omega'=m'\frac{d^2x'}{dt^2}dx',\ \text{etc.},$$

Ainsi l'équation précédente se change en

$$m\omega d\omega+m'\omega' d\omega'+\text{etc.}=\pm\mathrm{R}(dx-dx')\pm\mathrm{R}'(dx-dx'')$$
$$\pm\ \text{etc.},$$

si l'on pose

$$x'-x=r,\ x''-x=r',\ \text{etc.},$$

alors

$$dx'-dx=dr,\ dx''-dx=dr',\ \text{etc.},$$

et par suite

$$m\omega d\omega+m'\omega' d\omega'+\ldots=\mp\mathrm{R}dr\mp\mathrm{R}'dr'\mp\text{etc.};$$

r_0, r'_0, etc., étant les valeurs de r, r'... correspondantes à $\omega_0, \omega'_0, \ldots$, on obtient par l'intégration

$$(c)\ m\omega^2+m'\omega'^2+\ldots-(m\omega_0^2+m'\omega_0'^2+) = \mp\int_{r_0}^{r}\mathrm{R}\,dr\mp\int_{r'_0}^{r'}\mathrm{R}'dr\mp\mathrm{etc}.$$

Telle est l'équation des forces vives du système, et qui fait connaître la variation de la force vive de ce dernier.

Si nous ne considérons que deux points matériels, l'équation des forces vives se réduit à

$$m\omega^2+m'\omega'^2-(m\omega_0^2+m'\omega_0'^2)=\pm 2\int_{r_0}^{r}\mathrm{R}\,dr.$$

On adoptera le signe supérieur ou inférieur, suivant que la force R sera attractive ou répulsive. Si l'on suppose les vitesses initiales nulles, on aura simplement

$$m\omega^2+m'\omega'^2=\mp\int_{r_0}^{r}\mathrm{R}\,dr.$$

Si la force est attractive, on doit prendre le signe moins, et le premier membre étant essentiellement positif, le deuxième sera égal à $(r_0-r)\mathrm{R}_1$, R_1 étant une valeur moyenne de R entre les deux limites r, r_0 : il faut donc que $r_0>r$, c'est-à-dire que les corps se sont rapprochés; on vérifierait de même que les deux corps se sont éloignés dans le cas d'une force répulsive.

§ IV.

Lois du choc des corps en mouvement rectiligne.

179. Considérons deux corps sphériques homogènes, ou plus généralement deux corps homogènes dont la figure est celle d'un solide de révolution. Admettons

que les axes de ces deux corps étant placés dans une même ligne droite, ils se meuvent dans le sens de cette ligne avec des vitesses différentes. Lorsque les deux corps viendront à se rencontrer, il y aura choc; c'est-à-dire que les corps exerceront pendant un petit intervalle de temps un effort l'un contre l'autre, et qu'ensuite cet effort ayant cessé, ils continueront à se mouvoir suivant la même ligne avec des vitesses différentes de celles qui avaient lieu à l'instant où le choc a commencé. Il s'agit de rechercher les circonstances de ce phénomène, et principalement de déterminer s'il est possible, d'après la connaissance des masses respectives des corps et de leurs vitesses initiales, les valeurs des vitesses finales qui ont lieu quand le choc est terminé.

Il est nécessaire, pour se former des idées exactes sur ce sujet, d'avoir égard à la propriété des corps solides, désignée sous le nom d'*élasticité*, c'est-à-dire à la faculté qu'ils présentent de changer un peu de figure lorsqu'un effort est exercé sur une partie de leur surface, de résister à ces changements, et de reprendre d'eux-mêmes complétement ou en partie, quand l'effort a cessé, leur figure primitive. Lorsque deux corps viennent à se choquer, ils exercent l'un contre l'autre un effort dont l'intensité varie pendant la durée du choc, et par l'effet duquel la figure de leur surface subit près du point de contact une légère altération, que nous désignerons par le nom d'*impression*. La profondeur de l'impression est d'autant plus grande que l'effort exercé est plus grand, et il existe en général une relation entre l'effort exercé et la profondeur de l'impression produite, qui dépend de la figure et de la constitution physique du corps.

Considérons deux corps dont les masses sont m, m', soumis à des vitesses initiales ω_0, ω'_0, séparés par un espace r_0, et exerçant l'un sur l'autre une force répulsive R : d'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent, on a

$$(o)\quad m\omega^2+m'\omega'^2-(m\omega_0^2+m\omega'^2_0)=2\int_{r_0}^{r} \mathrm{R}dr.$$

Cette équation est fonction de r, et donne la variation de la force vive. Si, comme nous l'avons dit, nous supposons que ces deux corps sont des sphères ou des volumes de révolution, ayant leurs masses concentrées en leur centre, au moment où ces deux corps entreront dans la sphère d'activité l'un de l'autre, la vitesse initiale de chacun d'eux décroîtra et la matière élastique fera naître de part et d'autre des répulsions égales pour chaque moment infiniment court, mais d'autant plus grandes que les couches élastiques comprimées augmenteront. Il arrivera néanmoins que la pression élastique atteindra son maximum, et le moment sera celui où les pressions pourront contrebalancer les vitesses. Dès-lors les vitesses initiales seront détruites et les corps se repousseront, de manière que les segments élastiques ou comprimés repasseront par leurs premiers états naturels, se repoussant avec des pressions égales à celles qui les avaient déjà comprimés.

Les notions précédentes ne suffisent pas en général pour la détermination des vitesses finales de deux corps, entre lesquels un choc a eu lieu. Il est absolument nécessaire de prendre en considération pour cette détermination la constitution physique de chaque corps;

c'est-à-dire la nature des forces intérieures qui le constituent et par lesquelles il résiste aux changements de figure, et tend à reprendre complétement ou en partie sa figure primitive quand cette figure a subi quelque altération. Cependant il existe deux cas particuliers, où la détermination dont il s'agit peut être effectuée, et qui doivent être distingués parce qu'ils présentent des limites dont la considération est toujours utile dans les applications.

180. Le premier cas est celui où l'on supposerait les corps parfaitement élastiques, c'est-à-dire, tels que les impressions qui y ont été formées tendent à disparaître complétement et sont totalement effacées après que les corps cessent d'agir l'un sur l'autre, ce qui, en général, ne se passe pas tout à fait ainsi. Dans cette supposition, si r_0 est la distance des centres des deux corps quand ils sont en contact, et r la même distance quand ils ont pénétré dans la sphère d'activité l'un de l'autre, il est évident que quand r redevient égal à r_0 à la fin du choc, l'intégrale $\int_{r_0}^{r} \mathrm{R}dr$ devient nulle, et l'équation (*o*) devient

$$m\omega'^2+m'\omega''^2=m\omega_0^2+m'\omega'^2_0 \quad (o'):$$

cette formule démontre qu'à *la fin du choc de deux corps élastiques la somme des forces vives est la même qu'avant le choc.*

181. Le deuxième cas est celui où l'on supposerait la nature du corps telle que quand une impression y a été formée, elle se conserve sans que les corps tendent nullement à revenir à leur figure primitive, comme cela arriverait pour deux sphères de plomb; il est visible qu'alors le choc est fini lorsque les impressions

ont atteint leur maximum, et que les corps ne se dilateront pas après le choc. Ainsi l'intégrale ci-dessus ne serait pas nulle, et l'équation (o') n'est pas générale ; mais après le choc on peut considérer les masses comme n'en faisant qu'une, alors les vitesses, représentées par

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dx'}{dt},$$

sont égales, ou

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt},$$

et comme d'ailleurs on a

$$m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = m\omega_0 + m'\omega'_0,$$

on en déduit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m\omega_0 + m'\omega'_0}{m+m'},$$

pour la vitesse commune des deux masses Ω : on voit que *dans le choc de deux corps non élastiques, la vitesse commune, après le choc, est celle du centre de gravité du système des deux masses supposées élastiques.*

Si m' est en repos avant le choc, et qu'à raison de sa densité cette masse soit infiniment grande à l'égard de m, on aura sensiblement $\Omega = \omega$: la masse m' représentera alors un obstacle fixe ; et le corps dénué d'élasticité sera réduit au repos par le choc contre cet obstacle.

182. Revenons au cas de deux corps élastiques, et cherchons les vitesses ω, ω' de chaque masse après le choc. Ces vitesses sont données par les deux équations

$$m\frac{dx}{dt}+m'\frac{dx'}{dt}=m\omega_0\pm m'\omega'_0,$$

$$m\frac{dx^2}{dt^2}+m'\frac{dx'^2}{dt^2}=m\omega_0^2\pm m'\omega'^2_0,$$

pour résoudre ces deux équations mettons-les sous les formes

$$m\left(\frac{dx}{dt}-\omega_0\right)=-m'\left(\frac{dx'}{dt}\mp\omega'_0\right),\ m\left(\frac{dx^2}{dt^2}-\omega_0^2\right)$$

$$=-m'\left(\frac{dx'^2}{dt^2}\mp\omega'^2_0\right),$$

ces équations sont évidemment satisfaites en posant

$$\frac{dx}{dt}=\omega_0,\ \frac{dx'}{dt}=\pm\omega'_0:$$

mais il est évident que ce ne sont pas les vitesses après le choc. En effet, en supposant que les deux mobiles aillent dans le même sens, et que le premier mobile ait le plus de vitesse, cette vitesse aura été diminuée par la force répulsive qui agit à l'instant du choc. En analysant ainsi tous les cas qui peuvent se présenter, on verrait que les vitesses ne sont pas les mêmes avant et après le choc.

Reprenons l'équation

$$(p)\qquad m\frac{dx^2}{dt^2}+m'\frac{dx'^2}{dt^2}=m\omega_0^2+m'\omega'^2_0,$$

ou

$$(q)\qquad m\left(\frac{dx^2}{dt^2}-\omega_0^2\right)=-m'\left(\frac{dx'^2}{dt^2}\mp\omega'^2_0\right),$$

et de même

$$(r)\qquad m\left(\frac{dx}{dt}-\omega_0\right)=-m'\left(\frac{dx'}{dt}\mp\omega'_0\right):$$

divisant (q) et (r) on aura

(s) $$\frac{dx}{dt}+\omega_0=\frac{dx'}{dt}\pm\omega'_0:$$

multipliant cette équation par m, et l'ajoutant avec la précédente, il vient

$$(m+m')\frac{dx}{dt}-m\omega_0+m'\omega'_0=\pm 2m'\omega'_0,$$

d'où l'on tire

(A) $$\frac{dx}{dt}=\frac{(m-m')\omega_0+2m'\omega'_0}{m+m'}$$

et de même

(B) $$\frac{dx'}{dt}=\frac{(m'-m)\omega'_0+2m\omega_0}{m+m'}:$$

telles sont les vitesses des mobiles après le choc.

Ces deux expressions peuvent être mises sous la forme

$$\frac{dx}{dt}=\omega=2\Omega-\omega_0,\ \frac{dx'}{dt}=\omega'=2\Omega-\omega'_0.$$

183. Si la masse m' est regardée comme infinie, à raison de sa densité, par rapport à la masse m, et qu'on ait $\omega'_0=0$, on aura $\Omega=0$, et par conséquent $\omega=-\omega_0$; d'où il résulte que *quand une sphère douée d'une élasticité parfaite vient frapper un obstacle fixe, elle est réfléchie avec une vitesse égale et contraire à celle qu'elle avait avant le choc; s'il s'agit, par exemple, d'une sphère pesante qui tombe dans le vide sur un plan horizontal et inébranlable, elle devra remonter à sa hauteur primitive.*

184. Si les masses m, m' sont égales, l'équation (s) devient

$$\frac{dx}{dt}+\omega_0=\frac{dx'}{dt}\pm\omega'_0:$$

il s'agit d'avoir

$$\frac{dx}{dt}\ \frac{dx'}{dt}:$$

on arrive facilement à cette détermination en faisant dans (A) et (B) $m=m'$, et il vient

$$\frac{dx}{dt}=\omega'_0,\ \frac{dx'}{dt}=\omega_0,$$

il y a donc échange de vitesses dans le choc de deux mobiles parfaitement élastiques, et si l'un des corps est en repos avant le choc, il prendra après le choc la vitesse de celui qui vient le choquer et qui demeurera lui-même en repos en cet instant.

Il résulte de là que si on a une série de billes de masses égales, et ayant leurs centres rangés en ligne droite, si la première se meut suivant cette ligne, et du côté des autres billes de manière à choquer celle qui la suit, les chocs se transmettront ainsi jusqu'à la dernière qui se mouvra seule avec la vitesse de la première, tandis que toutes les autres se seront mises au repos après les chocs successifs. De même si toutes les billes qui suivent la première étaient juxta-posées, la première bille, en choquant la série de celles-ci, se réunira à la série qui demeurera en repos, excepté la dernière, qui se détachera seule avec la vitesse de la bille choquante; c'est ce qu'on peut vérifier avec des billes de billard.

CHAPITRE IV.

FORMULES DU MOUVEMENT CURVILIGNE.

§ Ier.

Mouvement curviligne d'un point matériel soumis à des forces accélératrices quelconques.

185. Dans les questions qui viennent d'être résolues, le mouvement du point matériel était rectiligne, parce que l'on a supposé ce point lancé dans la direction même de la force de la gravité, et parce que les résistances ont été regardées comme des actions dirigées en sens contraire du mouvement. Nous considérerons maintenant le cas général où un corps serait soumis à l'action de forces quelconques, dont les intensités et les directions peuvent varier avec le temps et avec la position du corps.

Nous avons expliqué comment les forces étaient définies et évaluées. Nous considérons ici des forces dont l'action est continue, telles que la gravité. Il serait possible que cette action ne s'exerçât que pendant un temps très-court, ce sera une circonstance particulière à laquelle on aura égard dans le cas où elle se présentera. D'ailleurs, dans la nature aucune action n'est rigoureusement instantanée. Il y a deux manières de définir une force, soit en donnant en unités de poids l'effort qu'elle exerce contre le corps, soit en donnant en unités de longueur la vitesse qu'elle peut

imprimer à une certaine masse dans l'unité de temps. Quant à la direction de la force, on la détermine, comme on l'a vu, en donnant les angles que cette direction fait avec trois axes rectangulaires.

Nous avons également expliqué la manière dont on exprimait la nature du mouvement d'un corps, en déterminant sa position à chaque instant par la valeur de trois coordonnées rectangulaires, qui sont regardées comme des fonctions variables du temps.

Le mouvement que prend un corps résulte nécessairement : 1° de la vitesse initiale avec laquelle il a été lancé dans l'espace ; 2° des actions exercées sur ce corps par les forces auxquelles il est soumis. La question consiste à déterminer le mouvement du corps lorsque la vitesse initiale et les forces sont données. Quelquefois aussi l'on considère le problème inverse, c'est-à-dire que le mouvement du corps étant donné, on demande quelle vitesse initiale lui a été imprimée, et quelles sont les forces dont il a ressenti l'action.

L'analyse différentielle est éminemment propre à la résolution de ces questions, parce qu'elle donne le moyen d'exprimer immédiatement des relations générales, toujours subsistantes entre les fonctions du temps qui représentent les coordonnées variables du point matériel et les valeurs des forces. On a ainsi des équations différentielles du deuxième ordre qui doivent être intégrées, et dont les intégrales se complètent par la considération particulière et spéciale de la position et de la vitesse initiale du point matériel.

Si un point matériel, doué d'une vitesse initiale, est sollicité à chaque instant par une force variable d'intensité et de direction avec le temps, il ne décrit plus

une ligne droite, mais bien une ligne courbe : ce sont les équations de ce mouvement que nous nous proposons de déterminer.

186. Il est d'abord nécessaire de distinguer le mouvement *relatif* du mouvement *absolu* : pour expliquer dans le cas dont il s'agit l'existence de ces deux mouvements, considérons deux points matériels doués d'une même vitesse initiale et sollicités par une même force, il est évident qu'ils parcourront ensemble une même courbe 0S, et parviendront en un même point après un certain temps *t* : si le deuxième point est sollicité par une force différente de celle qui agit sur le premier, il décrira une autre courbe 0S′, et parviendra en un point A′ lorsque le premier sera arrivé en A. Si on suppose qu'un spectateur parcourt la courbe 0A avec le point A, il ne verra pas le deuxième décrire la courbe 0A′, mais bien une autre courbe passant par les deux points A et A′ : pour mieux comprendre cet effet, on peut concevoir le spectateur placé au centre d'une sphère parfaitement pénétrable dans tous les sens ; il pourra se considérer en repos relativement au deuxième point, qui lui paraîtra décrire une courbe différente de 0S′ qui est celle suivant laquelle le deuxième mobile pénètre la sphère, et qu'on obtiendrait en rapportant toutes les positions successives du deuxième point au centre fixe, comme elles le sont aux positions correspondantes du point variable A. Cette courbe est la courbe du mouvement relatif, et s'appelle *excursion*. La corde AA′ se nomme *anomalie*. Fig. 50.

187. Nous admettrons que le mouvement relatif est indépendant du mouvement absolu, et nous allons en déduire la proportionnalité des forces aux vitesses que

nous avions posée en principe. Nous aurions pu suivre une marche inverse, mais cette manière de procéder eût été moins simple.

Fig. 51. Supposons deux points placés en o, et sollicités, le premier par une force constante P, et le deuxième par une force constante $P' = P + Q$: soit g la vitesse acquise dans l'unité de temps en vertu de la force P, g_1 la vitesse acquise dans l'unité de temps en vertu de la force Q : si au bout d'un temps t le premier mobile est parvenu en A, et le deuxième en A', les mouvements étant indépendants l'un de l'autre, et la vitesse initiale étant supposée nulle, on a

$$oA = \tfrac{1}{2}gt^2,\ AA' = \tfrac{1}{2}g_1t^2 \quad \text{et} \quad oA' = \tfrac{1}{2}(g+g_1)t^2.$$

Ainsi, $g+g_1$ est la vitesse acquise pendant l'unité de temps en vertu de la force P' : or, la vitesse acquise est une fonction déterminée de la force accélératrice, par conséquent

$$g = F(P),\ g_1 = F(Q)$$

et

$$g+g_1 = F(P) + F(Q) = F(P+Q);$$

mais de l'égalité

$$F(x+y) = F(x) + F(y),$$

x et y étant des variables indépendantes, on tire

$$F'(x) = F'(x+y),\ F'(y) = F'(x+y),$$

d'où

$$F'(x) + F'(y) = \text{const.} = C,$$

quels que soient x et y, donc

$$F'(x) = F'(o),$$

d'où

$$dF(x) = F'(o)dx,\quad F(x) - F(o) = ax;$$

d'ailleurs, pour que cette égalité ait lieu, quels que soient x et y, il faut que $F(o)=0$; ainsi

$$F(x)=ax \quad \text{ou} \quad F(P)=aP,$$

a étant une constante : donc $g=aP$, ce qui montre que *les vitesses croissent proportionnellement aux forces accélératrices.*

188. Cela posé, soit o le point de départ du mobile doué d'une vitesse initiale ω_0 : soit de plus P la force accélératrice. Au bout du temps t, ce mobile sera parvenu en un certain point A sur la courbe qu'il décrit : rien n'est plus facile que de déterminer la direction de la vitesse au point A, c'est-à-dire après un temps t, car cette vitesse étant dirigée suivant une tangente à la courbe, en appelant α,β,γ les angles de cette tangente avec les axes des coordonnées, on aura pour déterminer cette direction les trois équations Fig. 52.

$$\frac{dx}{\cos.\alpha}=\frac{dy}{\cos.\beta}=\frac{dz}{\cos.\gamma}=\frac{ds}{1}=\omega dt.$$

Si, à partir du point A, on donne au temps un accroissement Δt, le mobile parcourra un petit espace $AB=\Delta S$, et si au contraire on supposait qu'au point A la force accélératrice s'anéantît, le mobile parcourrait sur la tangente un espace AT ; et la courbe TrB serait l'excursion : la tangente au point T à cette courbe, est sensiblement parallèle à la direction de la force P en A ; or, cette tangente se confond à peu près avec la corde TB : d'après cela, les coordonnées du point A étant x,y,z, et par suite ceux du point B,

$$x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z$$

et ceux du point T,

$$x+\frac{dx}{dt}\Delta t,\ y+\frac{dy}{dt}\Delta t,\ z+\frac{dz}{dt}\Delta t.$$

Si on appelle λ,μ,ν les angles de la force accélératrice avec les axes des coordonnées, on aura

$$\frac{\cos.\lambda}{\Delta x-\frac{dx}{dt}\Delta t}=\frac{\cos.\mu}{\Delta y-\frac{dy}{dt}\Delta t}=\frac{\cos.\nu}{\Delta z-\frac{dz}{dt}\Delta t}:$$

d'ailleurs, en considérant les variables xyz comme des fonctions de t, et développant d'après la formule de Taylor, on obtient

$$x+\Delta x=x+\frac{dx}{dt}\Delta t+\frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\pm\varepsilon\right)+\text{etc.}$$

$$y+\Delta y=y+\frac{dy}{dt}\Delta t+\frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\pm\varepsilon\right)+\text{etc.}$$

$$z+\Delta z=y+\frac{dz}{dt}\Delta t+\frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dt^2}\pm\varepsilon\right)+z.$$

Ainsi, les égalités précédentes deviennent en négligeant les termes suivants:

$$\frac{\cos.\lambda}{\frac{d^2x}{dt^2}\pm E}=\frac{\cos.\mu}{\frac{d^2y}{dt^2}\pm E}=\frac{\cos.\nu}{\frac{d^2z}{dt^2}\pm E}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2(1\pm\varepsilon)^2\text{etc.}}},$$

ou en passant à la limite

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\cos.\lambda}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\cos.\mu}=\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\cos.\nu}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}:$$

ces équations déterminent la direction de la force accélératrice après un temps donné. m étant la masse, l'espace parcouru dans l'instant Δt est représenté par $\frac{1}{2}\frac{P}{m}\Delta t$, et cet espace est sensiblement égal à TB, et

$$TB=\sqrt{\left(\Delta x-\frac{dx}{dt}\Delta t\right)^2+\text{etc.}}$$

donc, en remplaçant chaque terme par sa valeur prise dans les développements ci-dessus, on a

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{P}}{m}\times\Delta t^2=\frac{\Delta t^2}{2}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2(1\pm\varepsilon)^2+\text{etc.}}$$

ou en divisant par Δt^2, et passant à la limite

$$\frac{\mathrm{P}}{m}=\varphi=\sqrt{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{d^2z}{dt^2}},$$

et on a encore

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\cos.\lambda}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\cos.\mu}=\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\cos.\nu}=\varphi,$$

ces équations serviront à déterminer l'intensité de la force accélératrice à un instant donné. Si on remplace φ par $\frac{\mathrm{P}}{m}$, on tire de cette dernière égalité

$$(1)\quad m\frac{d^2x}{dt^2}=p\cos.\lambda=\mathrm{X},\ m\frac{d^2y}{dt^2}=p\cos.\mu$$
$$=\mathrm{Y},\ m\frac{d^2z}{dt^2}=p\cos\nu=\mathrm{Z},$$

X, Y, Z étant les projections de la force accélératrice sur les axes rectangulaires, telles sont les équations du mouvement curviligne.

Le problème consistera dans l'intégration de ces trois équations : ces intégrales contiendront six constantes arbitraires, que l'on déterminera au moyen des valeurs initiales des coordonnées du mobile et de sa vitesse qui seront données pour $t=0$. Ces intégrales et leurs différentielles du premier ordre feront ensuite connaître la position du mobile à un instant quelconque, et sa vitesse en grandeur et en direction. En éli-

minant entre elles le temps t, on aura les deux équations de la courbe décrite par le mobile.

189. Il résulte des équations précédentes un fait important, c'est que la projection d'un mobile sur l'un des axes des coordonnées, coïncidera constamment dans son mouvement avec un certain point matériel de même masse qui, animé d'une force initiale égale à la projection de celle du mobile sur cet axe, serait sollicité par la projection sur ce dernier de la force qui agit sur le premier; il est clair, par exemple, que pour déterminer la position qu'occupe au bout du temps t, le point matériel qui se meut sur l'axe des x, il faudra intégrer l'équation

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\text{X},$$

et déterminer les constantes de manière que pour $t=0$ on ait

$$x=x_0, \text{ et } \frac{dx}{dt}=\omega_0 \cos. \alpha_0,$$

x_0 étant l'abscisse du point de départ, ω_0 la vitesse initiale, et α_0 l'angle qu'elle fait avec l'axe des x : or, si l'on considère le point dans l'espace, pour déterminer sa projection sur l'axe des x, il faudra intégrer la même équation à partir des mêmes limites, ce qui donnera la même valeur pour x. Ainsi, la projection algébrique de la force et de la vitesse sur les axes des y et des z, peut avoir des valeurs quelconques, sans influer en rien sur le mouvement projeté sur l'axe des x; il en est de même pour les deux autres. Donc le *mouvement suivant l'un quelconque des axes des coordonnées, est indépendant des deux autres.* Il s'ensuit aussi que, si *les forces appliquées au mobile*

sont, par exemple au nombre de trois, non comprises dans le même plan, ou si l'on considère la projection de la force unique qui agit sur lui, et que l'on prenne sur les directions de ces trois forces, à partir de leur point d'application, des droites de grandeurs finies qui soient entre elles comme les vitesses correspondantes, et que l'on achève le parallélipipède dont ces trois droites seront les côtés adjacents, la résultante de ces forces sera dirigée suivant la diagonale, et sa grandeur sera à celle de chacune de ces forces comme la diagonale est au côté correspondant.

On peut établir autrement le principe d'indépendance que nous venons de déduire : en effet, supposons d'abord que le point matériel, partant de la position dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0, se meuve en ligne droite seulement, en vertu d'une vitesse initiale ω_0, et faisant avec les axes les angles $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. Au bout du temps t, le point matériel ayant parcouru l'espace s, parviendra dans une position où ses coordonnées seront $x, y z$, et on aura

$$x-x_0=s\cos.\alpha_0,\ y-y_0=s\cos.\beta_0,\ z-z_0=s\cos.\gamma_0$$

ou bien encore

$$x-x_0=\omega_0\cos.\alpha_0 t,\ y-y_0=\omega_0\cos.\beta_0 t,\ z-z_0=\omega_0\cos.\gamma_0 t.$$

Ces équations montrent évidemment que les projections du point matériel sur les axes des coordonnées coïncident constamment avec des points matériels, partant des projections respectives du point de départ avec des vitesses constantes, respectivement égales à $\omega_0 \cos \alpha_0$, c'est-à-dire aux projections de la vitesse initiale ;on peut de là passer au cas général : considérons un point matériel se mouvant dans le plan des xy, exa- Fig. 53.

minons d'abord l'action sur le point matériel, de la seule composante parallèle à l'axe des x. Si on suppose que le mobile étant parvenu au point o, l'effet de cette force soit suspendu, il se mouvra sur la tangente et parviendra en T au bout d'un certain temps t, tandis qu'il parviendra dans le même temps en A si la force continue d'agir : alors la courbe du mouvement relatif, passant par les deux points T et A, sera une parallèle à l'axe des x. Si maintenant on suppose que la composante parallèle à l'axe des y n'est pas nulle, elle ne pourra déplacer le point matériel que suivant une parallèle à l'axe des y, par conséquent sa projection sur l'axe des x sera la même. Nous avons vu d'ailleurs que le mouvement d'un point matériel projeté sur l'axe des x est indépendant de la projection de la vitesse initiale sur les autres axes. Donc il est à la fois indépendant des projections sur l'axe des y de la vitesse initiale et de la force accélératrice.

Ce que nous venons de dire du plan des xy peut facilement s'étendre aux trois dimensions : en effet, considérons un point matériel soumis seulement à l'action des composantes parallèles aux axes des x et des y; si ensuite on suppose que la troisième composante agisse, elle ne pourra entraîner le mobile que suivant un parallèle à l'axe des z, ainsi les positions du mobile se trouveront dans un plan perpendiculaire à l'axe des x: par conséquent, les projections sur cet axe n'auront pas changé. On raisonnerait de même pour chacun des deux autres axes.

On pourrait établir directement cette proposition et en déduire les équations du mouvement.

§ II.

Mouvement curviligne d'un corps pesant dans le vide.

190. Considérons un point matériel sollicité par l'action verticale de la gravité et qui aurait été lancé dans une direction avec une vitesse donnée : la ligne qu'il décrit devant être comprise dans le plan vertical passant par la direction initiale de sa vitesse, il suffira de rapporter le mouvement du point matériel à une coordonnée horizontale y dirigée dans ce plan, et une ordonnée verticale comptée dans le sens du mouvement. Fig. 54.

Nous supposerons d'abord que la vitesse initiale ω_0 est dirigée de haut en bas, en sorte que les angles α, β, qu'elle fait avec les axes, sont aigus. Soit g la force accélératrice de la pesanteur, m la masse du mobile, on a dans ce cas

$$\varphi = g,\ p = mg,\ \cos.\lambda = 1,\ \cos.\mu = 0$$

d'où

$$X = p = mg,\ Y = 0,$$

ainsi les équations du mouvement se réduisent à

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g,\ \frac{d^2y}{dt^2} = 0 :$$

Pour avoir l'équation de la trajectoire il faut intégrer ces deux équations, et éliminer t entre les deux équations résultantes. Pour faire disparaître les constantes il suffit d'opérer l'intégration à partir du point de départ ou de l'origine, c'est-à-dire à partir de $t = o$, auquel correspondent $x = 0, y = 0$; d'après cela,

$$\omega \cos.\alpha,\ \omega \cos.\beta$$

étant les projections de la vitesse, et

$$\omega_0 \cos.\alpha_0,\ \omega_0 \cos.\beta_0,$$

celles de la vitesse initiale, il vient en intégrant une fois

$$\frac{dx}{dt} - \omega_0 \cos.\alpha_0 = gt, \quad \frac{dy}{dt} - \omega_0 \cos.\beta_0 = 0$$

ou

$$dx = \omega_0 \cos.\alpha_0 \, dt + gt dt, \quad dy = \omega_0 \cos.\beta \, dt,$$

d'où, en intégrant de nouveau,

$$x = \omega_0 \cos.\alpha_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2, \quad y = \omega_0 \cos.\beta_0 t :$$

on peut parvenir directement à ces mêmes équations, en effet : en supposant que le mobile soit parvenu en D, en vertu de la vitesse initiale, pendant qu'il est parvenu en A en vertu de cette même force jointe à la pesanteur, il est évident que le mouvement relatif est uniformément varié, ainsi on a $s = \omega_0 t$: de plus la ligne du mouvement relatif ne sera autre chose qu'une droite AD parallèle à l'axe de x, ainsi en appelant ξ, η les coordonnées du point D, on a

$$\xi = \omega_0 t \cos.\alpha_0, \quad \eta = \omega_0 t \cos.\beta_0,$$

d'ailleurs AD étant l'espace parcouru,

$$x - \xi = \tfrac{1}{2} g t^2, \quad y - \eta = 0,$$

donc

$$x = \omega_0 t \cos.\alpha_0 + \tfrac{1}{2} g t^2, \quad y = \omega_0 t \cos.\beta_0,$$

équations identiques aux précédentes. Maintenant il reste à éliminer t entre ces deux équations. D'abord, dans le cas où la vitesse initiale est horizontale, on a simplement

$$x = \tfrac{1}{2} g t^2, \quad y = \omega_0 t$$

puisque

$$\cos.\alpha_0 = 0, \quad \cos.\beta_0 = 1,$$

par conséquent la *trajectoire est la parabole*

$$x = \frac{1}{2}\frac{gy^2}{\omega_0^2};$$

or, h étant la hauteur due à la vitesse ω_0, on a

$$\omega_0 = \sqrt{2gh},$$

par cette substitution, l'équation de la parabole devient $y^2 = 4hx$, ce qui montre que *son foyer est à une distance du sommet égale à* h, *c'est-à-dire à une distance* h *de l'origine*. Dans le cas général l'élimination de t donne

$$x = \frac{\cos.\alpha_0}{\cos.\beta_0}y + \frac{gy^2}{2\omega_0^2\cos.^2\beta_0}$$

ou

$$x = \frac{\cos.\alpha_0}{\cos.\beta}y + \frac{y^2}{4h\cos.^2\beta},\ y^2 + 4h\cos.\alpha_0\cos.\beta_0 y = 4h\cos.^2\beta_0,$$

équation d'une parabole ayant pour grand axe une parallèle à l'axe vertical des x. Complétant le carré du premier membre, cette équation devient

$$(y + 2h\cos.\alpha_0\cos.\beta_0)^2 = 4h\cos.^2\alpha_0(x + h\cos.^2\alpha_0).$$

Si maintenant on transporte l'origine au point

$$x = -h\cos.^2\alpha_0,\quad y = -2h\cos.\alpha_0\cos.\beta_0,$$

on obtient pour l'équation de la trajectoire

$$y^2 = 4h\cos.^2\beta_0 x,$$

qui représente une parabole rapportée à son sommet, ayant pour coordonnées du sommet

$$x = -h\cos.^2\alpha_0,\quad y = -2h\cos.\alpha_0\cos.\beta_0,$$

et dont la distance focale est $h\cos.^2\beta_0$.

191. Il est facile d'exprimer la vitesse en fonction de la vitesse initiale, car on a

$$\omega\cos.\alpha = \frac{dx}{dt} = \omega_0\cos.\alpha_0 + gt\,,$$

$$\omega\cos.\beta = \frac{dy}{dt} = \omega_0\cos.\beta_0\,,$$

élevant au carré et ajoutant membre à membre, on obtient

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2g\omega_0\cos.\alpha_0 t + g^2t^2 = \omega_0^2 + 2g\,(\omega_0\cos.\alpha_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2)$$
$$= \omega_0^2 + 2gx:$$

on peut parvenir autrement à ce résultat, en effet de l'équation

$$m\omega d\omega = \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz$$

on tire

$$\omega d\omega = gdx \quad \text{ou} \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2gx\,;$$

en observant que

$$\mathrm{X} = mg,\ \ \mathrm{Y} = 0,\ \ \mathrm{Z} = 0,$$

on déduit de l'égalité précédente

$$m\omega^2 - m\omega_0^2 = 2\mathrm{P}x = 2gmx:$$

expression de la variation de la force vive du système. Si $\omega_0 = o$ on a simplement $\omega^2 = 2gx$, équation analogue à

$$\omega_0 = \sqrt{2gh}.$$

192. Supposons maintenant la vitesse initiale dirigée de bas en haut, et appelons θ l'angle qu'elle fait avec l'axe des y positif. On a dans ce cas

$$\alpha_0 = \theta + \frac{\pi}{2},\ \ \beta_0 = \theta$$

ou

$$\cos\beta_0 = \cos.\theta \quad \text{et} \quad \cos.\alpha_0 = \cos.\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin.\theta\,;$$

d'ailleurs

$$\frac{1}{\cos.^2\theta} = \sec.^2\theta = 1 + \text{tang.}^2\theta$$

et l'équation de la trajectoire devient

$$x = -y \ \text{tang.}\theta + (1 + \text{tang.}^2\theta)\frac{y^2}{4h},$$

ou en posant $\text{tang}\,\theta = \tau$

$$x = -\tau y + \frac{y^2}{4h}(1 + \tau^2);$$

les coordonnées du sommet, qui est ici le *point le plus haut* de la trajectoire, deviennent

$$x = -h\sin.^2\theta, \ y = 2h\sin.\theta\cos.\theta = h\sin.\ 2\theta,$$

ainsi *la hauteur du jet*

$$kh = h\sin.^2\theta$$

et *l'amplitude*

$$oo' = 2h\sin.2\theta:$$

on voit donc que *l'amplitude sera la plus grande possible pour une vitesse initiale donnée lorsque l'on aura* $2\theta = 1$, ou $\theta = \frac{\pi}{4}$, *c'est-à-dire lorsqu'on lancera le projectile sous un angle de* 45°.

193. En faisant varier θ ou τ dans le même plan, on obtiendra diverses paraboles; il est facile d'avoir la courbe enveloppe de celles-ci, en effet, nous avons

$$x = -\tau y + \frac{y^2}{4h}(1 + \tau^2);$$

différentiant par rapport à la variable τ, il vient

$$0 = -y + \frac{y^2}{2h}\tau \quad \text{ou} \quad \tau = \frac{2h}{y}$$

substituant, l'équation cherchée est

$$x=-2h+\frac{y^2}{4h}+h=\frac{y^2}{4h}-h \quad \text{ou} \quad y^2=4h(x+h)$$

et représente une parabole, dont le sommet est sur l'axe des x à une distance $-h$ de l'origine, et dont le paramètre est $2h$. Il est facile de voir que cette courbe coupe l'axe des x à une distance de l'origine égale à $-h$, ce qui devait être, et que sa tangente au sommet est la directrice commune de toutes les enveloppées. Cette parabole enveloppe, transportée parallèlement à elle-même de manière que son sommet soit à l'origine, coïnciderait avec celle que décrit le mobile partant de l'origine quand sa vitesse initiale est horizontale.

§ III.

Mouvement curviligne d'un corps pesant dans un milieu résistant.

194. Les questions relatives au tir des projectiles seraient résolues d'une manière trop éloignée des effets naturels si, comme on l'a fait dans le paragraphe précédent, on négligeait entièrement la résistance de l'air. On sait que pour les très-grandes vitesses qui doivent être considérées dans ces questions, la résistance augmente suivant une progression plus rapide que celle du carré de la vitesse, et d'ailleurs elle dépend de la densité de l'air qui varie dans les diverses parties de la trajectoire. L'appréciation exacte de cette dernière circonstance donnerait lieu à des calculs fort compliqués. Nous supposerons simplement ici la densité de l'air uniforme, et la résistance une fonction de la vitesse du

mobile, et nous examinerons le cas où la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.

Nous supposerons donc que le mobile ne se meut plus dans le vide, mais bien dans un milieu résistant. La courbe décrite par le mobile sera encore plane, et nous aurons les deux équations Fig. 55.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=p\cos.\lambda=\mathrm{X},\ m\frac{d^2y}{dt^2}=p\cos.\mu=\mathrm{Y},$$

car le mobile ne sort pas du plan xy : mais ici x et y ne sont plus seulement les projections de la pesanteur, mais bien celles de la résultante de la pesanteur et de la résistance du milieu. Avant tout, il est bon de transformer ces équations en d'autres plus commodes : nous avons

$$\frac{dx}{dt}=\omega\cos.\alpha,\ \frac{dy}{dt}=\omega\cos.\beta=\omega\sin.\alpha\ ;$$

ainsi,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\cos.\alpha\frac{d\omega}{dt}-\omega\sin.\alpha\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\mathrm{X}}{m},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\sin.\alpha\frac{d\omega}{dt}+\omega\cos.\alpha\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\mathrm{Y}}{m}:$$

multipliant ces deux équations, la première par $\cos\alpha$, et la deuxième par $\sin\alpha$, et ajoutant il vient

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\mathrm{X}\cos.\alpha+\mathrm{Y}\sin.\alpha}{m}:$$

maintenant multiplions la première par $-\sin\alpha$, la deuxième par $\cos\alpha$, et ajoutons, et nous aurons

$$\omega\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\mathrm{Y}\cos.\alpha-\mathrm{X}\sin.\alpha}{m}:$$

Voilà les deux équations qui vont nous servir.

Nous avons remplacé cos. β par sin α, ce qui veut dire que la vitesse est dirigée dans le sens des y positifs : nous ne considérerons point le projectile dans son mouvement ascendant, nous le prendrons au point où il commence à descendre, et que nous prendrons pour origine des coordonnées, en sorte qu'il sera indifférent de supposer que la vitesse initiale est dirigée de bas en haut.

La résistance de l'air agissant toujours en sens contraire de la vitesse et croissant avec elle d'une manière continue, de manière à devenir nulle ou infinie avec la vitesse, peut être représentée par $f(\omega)$; or, en un point quelconque, la force accélératrice est la résultante de la pesanteur et de la résistance ; nous avons donc

$$X = mg - f(\omega)\cos.\alpha, Y = -f(\omega)\sin.\alpha$$

d'où l'on tire

$$X\cos.\alpha + Y\sin.\alpha = mg\cos.\alpha - f(\omega),$$
$$Y\cos.\alpha - X\sin.\alpha = -mg\sin.\alpha,$$

et par suite

$$\frac{d\omega}{dt} = g\cos.\alpha - \frac{1}{m}f(\omega), \quad \omega\frac{d\alpha}{dt} = -g\sin.\alpha$$

ou

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{-g\sin.\alpha}{\omega}:$$

voyons les conséquences que nous pouvons déduire de ces équations.

D'abord la deuxième fait voir que sin. α étant une quantité positive,

$$\frac{d\alpha}{dt} \text{ ou } \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

est une quantité négative, c'est-à-dire que l'angle α diminue avec le temps, ou que le mobile se rapproche

de la verticale ; mais si α devient nùl, le mobile ne pourra plus sortir de la verticale, puisqu'il ne sera sollicité que par des forces verticales, ainsi le mobile ne pourra jamais repasser du côté des y négatifs.

La première des deux équations précédentes fournit aussi des conséquences importantes : en effet, d'abord la vitesse ne peut atteindre un maximum, car pour le point où ce maximum aurait lieu, on aurait $\frac{d\omega}{dt}=0$, puis $\frac{d\omega}{dt}$ serait négatif, mais en même temps g cos. α augmentant, $\frac{1}{m}f(\omega)$ diminue, et l'équation

$$g\cos.\alpha=\frac{d\omega}{dt}+\frac{1}{m}f(\omega),$$

serait absurde. Ainsi il ne saurait y avoir un maximum de vitesse : de plus, cette vitesse ne peut par croître indéfiniment, car s'il en était autrement, $\frac{1}{m}f(\omega)$ finirait par surpasser g cos. α, ce qui ne peut arriver, puisque alors $\frac{d\omega}{dt}$ serait négatif, ce qui supposerait un maximum : on ne voit pas de même qu'il ne peut pas y avoir de minimum, mais évidemment la vitesse ne peut pas décroître indéfiniment, car si elle devenait nulle on aurait g cos. $\alpha=0$, égalité impossible.

D'après cela, si la vitesse commence par croître, elle continuera de croître sans pouvoir dépasser une certaine limite ; si elle commence par décroître, ou elle atteindra un minimum pour croître ensuite en s'approchant d'une limite fixe, ou elle continuera encore à décroître sans pouvoir décroître indéfiniment : par con-

séquent *dans tous les cas la vitesse s'approche d'une limite fixe* que nous allons déterminer.

195. Désignons par A et B les limites vers lesquelles convergent les quantités

$$\frac{g\sin.\alpha}{\omega} \text{ et } g\cos.\alpha - \frac{1}{m}f(\omega) ;$$

on aura sensiblement

$$\frac{g\sin.\alpha}{\omega} = \mathrm{A} \pm \varepsilon = \frac{d\alpha}{dt},\ g\cos.\alpha - \frac{1}{m}f(\omega) = \mathrm{B} \pm \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} :$$

intégrant la première de ces équations à partir de $t=0$ pour lequel $\alpha = \alpha_0$, il vient

$$\alpha - \alpha_0 = \int_0^t (\mathrm{A} \pm \varepsilon)\, dt = t(\mathrm{A} \pm \varepsilon) :$$

or, le premier membre est nécessairement une quantité finie, tandis que le deuxième membre peut devenir infini pour $t = \infty$, à moins que l'on n'ait $\mathrm{A}=0$, donc $\mathrm{A}=0$; on trouverait de même $\mathrm{B}=0$, et ces égalités reviennent à

$$\lim. \frac{g\sin.\alpha}{\omega} = 0,\ \lim. (\cos.\alpha - \frac{1}{m}f\omega) = 0$$

ou sensiblement

$$\frac{g\sin.\alpha}{\omega} = 0,\ g\cos.\alpha - \frac{1}{m}f(\omega) = 0 :$$

la première n'est autre chose que $\sin\alpha = 0$, ou $\alpha = 0$, et par suite la deuxième se réduit à

$$g = \frac{f(\omega)}{m},\ f(\omega) = mg :$$

cela nous montre qu'*à la limite la vitesse finit par devenir verticale*, *et qu'alors la force accélératrice est*

égale à la résistance du milieu, et qu'ainsi le mobile se meut d'un mouvement uniforme.

196. On peut aller plus loin et démontrer que la courbe ou trajectoire a une asymptote verticale. En effet, nous avons

$$\frac{dy}{dt}=\omega \sin.\alpha, \frac{dx}{dt}=-\frac{g\sin.\alpha}{\omega},$$

d'où

$$dy=-\frac{\omega^2}{g}\,dx$$

ou en intégrant à partir de $y=0$,

$$Y=-\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\omega^2 dx=(x_0-\alpha)\frac{1}{g}\,v^2,$$

v^2 étant une moyenne entre ω^2 et ω_0^2 : or, ce deuxième membre est nécessairement une quantité finie ; donc y finit par devenir égal à une constante b, ainsi $y=b$ est une asymptote de la courbe (cette remarque est de M. Coriolis).

197. Jusqu'à présent $f(\omega)$ est restée indéterminée : nous allons la supposer proportionnelle à une puissance de la vitesse, en sorte que l'on ait $f(\omega)=a\omega^n$: en désignant par Ω la vitesse finale, on aura de même

$$f(\Omega)=mg=a\Omega^n$$

d'où

$$(1)\ f(\omega)=\frac{mg}{\Omega^n}\,\omega^n.$$

cherchons à intégrer dans ce cas les équations du mouvement : ces équations sont

$$X=mg-f(\omega)\cos.\alpha,\quad Y=-f(\omega)\sin.\alpha,$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2}=d\left(\frac{\omega\cos.\alpha}{dt}\right)=g-\frac{1}{m}f(\omega)\cos.\alpha\,,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=d\left(\frac{\omega\sin.\alpha}{dt}\right)=-\frac{1}{m}f(\omega)\sin.\alpha\,:$$

Cette dernière équation est facilement intégrable, en effet, en observant que

$$\omega\frac{d\alpha}{dt}=-g\sin.\alpha\,,$$

et ayant égard à (1), elle revient à

$$d\left(\frac{\omega\sin.\alpha}{d\alpha}\right)=\frac{\omega}{mg}f(\omega)=\frac{\omega^{n+1}}{\Omega^n}$$

ou

$$d\left(\frac{\omega\sin.\alpha}{\omega^{n+1}\sin.^{n+1}\alpha}\right)=\frac{d\alpha}{\Omega^n\sin.^{n+1}\alpha},$$

ou en posant

$$(2)\quad v=\omega\sin.\alpha\,,\quad \frac{dv}{v^{n+1}}=\frac{d\alpha}{\Omega^n\sin.^{n+1}\alpha},$$

il vient de là en intégrant

$$-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{v^n}-\frac{1}{v_0{}^n}\right)=\frac{1}{\Omega^n}\int\frac{d\alpha}{\sin.^{n+1}\alpha}\,:$$

il reste à résoudre

$$\int\frac{d\alpha}{\sin.^{n+1}\alpha}\,:$$

pour cela posons tang $\frac{1}{2}\alpha=\lambda$, alors

$$\alpha=2\,\text{arc tang.}\,\lambda,\quad d\alpha=\frac{2d\lambda}{1+\lambda^2},$$

or, on a généralement

$$\sin.\alpha = 2\sin.\frac{1}{2}\alpha\cos.\frac{1}{2}\alpha = 2\,\mathrm{tang}.\frac{1}{2}\alpha\cos.^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$$

dans le cas dont il s'agit; ainsi

$$\sin.^{n+1}\alpha = \frac{2^{n+1}\lambda^{n+1}}{(1+\lambda^2)^{n+1}}:$$

par conséquent on a pour l'intégrale cherchée

$$\int = \frac{1}{2^n}\int (1+\lambda^2)^n \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}} = \frac{1}{2^n}\int\left(\lambda^{2n} + \frac{n}{1}\lambda^{2n-2} + \text{etc.}\right)\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2^n}\int\left(\lambda^{n-1} + \frac{n}{1}\lambda^{n-3} + \text{etc.}\right)d\lambda = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\lambda^n}{n} + \frac{n}{1}\frac{\lambda^{n-2}}{n-2} + \ldots\right)$$

$$-\frac{1}{2^n}\left(\frac{\lambda_0^{\,n}}{n} + \frac{n}{1}\frac{\lambda_0^{\,n-2}}{n-2} + \text{etc.}\right).$$

Ainsi le résultat définitif de l'intégration est

$$-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\nu^n} - \frac{1}{\nu_0^{\,n}}\right) = \frac{1}{2^n.\Omega^n}\left\{\frac{\lambda^n - \lambda_0^{\,n}}{n} + \frac{n}{1}\frac{\lambda^{n-2} - \lambda_0^{\,n-2}}{n-2} + \text{etc.},\right\}$$

cette équation nous donnera ν en fonction de λ, ou de α, et ensuite (2) nous donnera ω en fonction de ν et α, ou seulement de α. Dans le cas où n est pair, il y a un terme du milieu de la forme

$$\frac{n(n-1)(\ldots..)\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\,3\ldots\ldots\frac{n}{2}}\frac{d\lambda}{\lambda}$$

qui, étant intégré, devient

$$\frac{n(n-1)\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\ldots\frac{n}{2}}\log.\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right).$$

ainsi dans le cas de $n=2$ on a à intégrer

$$\int_{\alpha}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sin.^3\alpha} = \frac{1}{4}\int_{\lambda_0}^{\lambda} (1+\lambda^2)^2 \frac{d\lambda}{\lambda^3} = \frac{1}{4}\int_{\lambda_0}^{\lambda} \left(\lambda + \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^3}\right) d\lambda$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\lambda^2 + 2\log.\lambda - \frac{1}{2\lambda^2}\right\} - \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\lambda_0^2 + 2\log.\lambda_0 - \frac{1}{2\lambda_0^2}\right\} :$$

Du reste on peut intégrer $\int \frac{d\alpha}{\sin.^3\alpha}$ de plusieurs manières, d'abord en opérant comme sur une intégrale binome, ou plus simplement en multipliant haut et bas par $\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha$, on y ramène ainsi l'intégration à celle de

$$\int \frac{d\alpha}{\sin.\alpha} = \int \frac{\frac{1}{2} d\alpha}{\sin.\frac{1}{2}\alpha \cos.\frac{1}{2}\alpha} = \int \frac{d\frac{\alpha}{2}}{\text{tang}.\frac{1}{2}\alpha \cos.\frac{1}{2}\alpha}$$

$$= \int \frac{d\,\text{tang}.\frac{1}{2}\alpha}{\text{tang}.\frac{1}{2}\alpha} = \log.\ \text{tang}.\frac{1}{2}\alpha + \text{constante}.$$

Nous avons dans le cas général

$$\frac{d\nu}{\nu^{n+1}} = \frac{1}{(2\rho)^n}(1+\lambda^2)^n \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}.$$

Cela posé, pour résoudre le problème il suffit d'exprimer x, y et s en fonction de α. Or, nous avons

$$dx = \omega \cos.\alpha dt,\quad dt = -\frac{\omega\, d\alpha}{g \sin.\alpha} = -\frac{\nu\, d\alpha}{g \sin.^2\alpha},$$

d'où

$$dx = -\frac{\nu^2}{g}\frac{\cos.\alpha d\alpha}{\sin.^3\alpha},$$

de même

$$dy = \omega \sin.\alpha\, dt = v dt = -\frac{v^2}{g}\frac{d\alpha}{\sin.^2\alpha},\ ds = \omega\, dt = \frac{v}{\sin.\alpha} dt$$
$$= -\frac{v^2}{g}\frac{d\alpha}{\sin.^3\alpha}:$$

on remplacera v par sa valeur en α, après cela intégrant les deux premières de ces trois équations, et éliminant α, on aura l'équation de la trajectoire : on peut aussi exprimer aisément dt, dx, dy, ds en fonction de λ ; en effet, nous avons

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\alpha = \lambda,\ d\alpha = \frac{2d\lambda}{1+\lambda^2}\ \sin.\alpha = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2},\ \cos.\alpha = \cos.^2\frac{\alpha}{2} - \sin.^2\frac{\alpha}{2}$$
$$= \cos.^2\frac{\alpha}{2}(1-\lambda^2) = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2},$$

et en substituant, il vient

$$dt = -\frac{v}{2g}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2}\right)d\lambda,\quad dx = -\frac{v^2}{4g}\left(\frac{1-\lambda^4}{\lambda^3}\right)d\lambda,$$
$$dy = -\frac{v^2}{2g}\left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right)d\lambda,\ ds = -\frac{v^2}{4g}(1+\lambda^2)^2\frac{d\lambda}{\lambda^3}:$$

dans le cas particulier de $n=2$, il est aisé d'avoir la valeur de s, car on a

$$ds = -\frac{v^2}{g}\frac{d\alpha}{\sin.^3\alpha},$$

mais alors

$$\frac{d\alpha}{\sin.^3\alpha} = \Omega^2\frac{dv}{v^3}$$

d'où

$$ds = -\frac{\Omega^2}{g}\frac{dv}{v},$$

ou

$$\frac{dv}{v} = \frac{-g}{\Omega^2}ds$$

d'où l'on tire

$$\log.\left(\frac{v}{v_0}\right)=-\frac{gs}{\Omega^2},\ v=v_0.e^{-\frac{gs}{\Omega^2}},$$

198. On voit, d'après ce qui précède, qu'il est très-difficile de trouver la courbe décrite dans le cas général; mais si on suppose que la vitesse initiale est presque horizontale, alors on peut calculer par approximation la portion de la trajectoire située au-dessus de l'axe des y, c'est-à-dire au-dessus de l'horizontale menée par le point de départ.

Fig. 56. Soit θ l'angle de la vitesse variable avec l'axe des y, et θ_0 celui de la vitesse initiale avec le même axe; $\theta, \theta_0, \theta-\theta_0$ sont des quantités très-petites : on a dans ce cas

$$\alpha=\frac{\pi}{2}+\theta,\ \alpha_0=\frac{\pi}{2}+\theta_0,$$

d'où

$$\sin.\alpha=\sin.\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin.\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos.\theta,$$

or, θ est très-petit par hypothèse, et on a

$$\cos.\theta=1-\frac{\theta^2}{2}+\text{etc.}=1,$$

en négligeant les quantités de l'ordre de θ^2 ou d'un ordre supérieur. Par la même raison

$$\cos.\alpha=\cos.\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cos.\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\sin.\theta$$
$$=-\left(\theta-\frac{\theta^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right)=-\theta,$$

ainsi

$$d\alpha=d\theta,\ \omega\sin.\alpha=v=\omega:$$

l'équation différentielle

$$\frac{d\nu}{\nu^{n+1}} = \frac{1}{\Omega^n}\,\frac{dx}{\sin.^{n+1}\alpha},$$

devient

$$\frac{d\omega}{\omega^{n+1}} = \frac{1}{\Omega^n}\,d\theta :$$

on tire de là en intégrant

$$-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0^{\,n}}\right) = \frac{1}{\Omega^n}\,(\theta-\theta_0)$$

ou

$$\frac{1}{\omega^n} = \frac{1}{\omega_0^{\,n}} - \frac{n}{\Omega^n}\,(\theta-\theta_0),$$

et

$$\omega^n = \frac{1}{\dfrac{1}{\omega_0^{\,n}} - \dfrac{n}{\Omega^n}\,(\theta-\theta_0)} = \frac{\omega_0^{\,n}}{1-\dfrac{n\omega_0^{\,n}}{\Omega^n}\,(\theta-\theta_0)} = \frac{\omega_0^{\,n}}{1-kn)\theta-\theta_0)},$$

en posant $\frac{\omega_0^{\,n}}{\Omega^n}=k$: observons maintenant que

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+\ldots = 1+u,$$

quand u est très-petit et qu'ainsi

$$\omega^n = \omega_0^{\,n}\left\{1+nk\,(\theta-\theta_0)\right\} :$$

Voyons ce que deviennent les expressions de dx, dy quand $n=2$

$$dx = -\frac{u^2}{g}\,\frac{\cos.\,\alpha}{\sin.^3\alpha} = \frac{\omega^2}{g}\,\theta\,d\theta,$$

or, en remplaçant θ^2 par sa valeur

$$dx = \frac{\omega_0^{\,2}}{g}\,\theta\,\left\{1+2k(\theta-\theta_0\right\}\,d\theta,$$

et négligeant les puissances de $\theta-\theta_0$ supérieures à la

première. Par une suite de transformations faciles à faire, on trouve

$$dx = \frac{\omega_0^2}{g} \left\{ \theta_0 + (\theta - \theta_0) \right\} \left\{ 1 + 2k(\theta - \theta_0) \right\} d\theta = \omega_0^2 \left\{ \theta_0 + (1 + 2k\theta_0)(\theta - \theta_0) + 2k(\theta - \theta_0)^2 \right\} d\theta,$$

d'où en intégrant,

$$x = \frac{\omega_0^2}{g} \left\{ \theta_0(\theta - \theta_0) + (1 + 2k\theta_0) \frac{\theta \;\; \theta_0)^2}{2} \right\}.$$

Nous n'avons pas intégré le carré de $\theta - \theta_0$, car nous pouvons négliger le cube de $(\theta - \theta_0)$, ce qui revient à négliger le carré de $(\theta - \theta_0)$ dans l'équation différentielle. D'un autre côté

$$dy = -\frac{\omega^2}{g} d\theta = -\frac{\omega_0^2}{g} \left\{ 1 + 2k(\theta - \theta_0) \right\} d\theta,$$

d'où

$$y = -\frac{\omega_0^2}{g} \left\{ \theta - \theta_0 + k(\theta - \theta_0)^2 \right\}:$$

il ne reste plus pour avoir l'équation de la trajectoire qu'à éliminer $\theta - \theta_0$ entre les valeurs de x et y; mais on peut trouver une relation entre x et y indépendante de θ, θ_0 d'une manière plus simple : appelons h la hauteur due à la vitesse ω_0 alors

$$\omega_0^2 = 2gh \quad \text{et} \quad y = -2h \left\{ \theta - \theta_0 + k(\theta - \theta_0)^2 \right\}$$

ou

$$-\frac{y}{2h} = \theta - \theta_0 (1 + k(\theta - \theta_0) \quad \text{ou} \quad (\theta - \theta_0)^2 + \frac{\theta - \theta_0}{k} = \frac{-y}{2hk};$$

cette équation étant du deuxième degré en $(\theta - \theta_0)$, donne en la résolvant

$$\theta-\theta_0=-\frac{1}{2k}\pm\sqrt{\frac{1}{4k^2}-\frac{y}{2hk}}=-\frac{1}{1k}+\frac{1}{2hk}\sqrt{h^2-2hky}$$

$$=-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2hk}(h^2-2hky)^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2k}$$

$$+\frac{1}{2hk}\left(h-ky-\frac{1}{2}\frac{k^2y^2}{h}+\text{etc.}\right)=-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2hk}\left(h-ky-\frac{1}{2}\frac{k^2y^2}{h}\right),$$

en négligeant les autres termes. Il vient de là en réduisant

$$\theta-\theta_0=-\frac{y}{2h}-\frac{1}{4}\frac{ky}{h^2}$$

ou

$$\theta_0-\theta=\frac{y}{2h}+\frac{1}{4}\frac{ky^2}{h^2}:$$

il faut substituer cette valeur dans les équations ci-dessus; mais on peut opérer plus simplement: on a

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\cos\alpha}{\sin.\alpha}=-\theta,$$

dès lors on trouve

$$\theta_0+\frac{dx}{dy}=\frac{y}{2h}+\frac{ky^2}{4h^2},\quad dx+\theta_0 dy=\left(\frac{y}{2h}+\frac{ky^2}{4h^2}\right)dy,$$

l'intégration donne

$$x+\theta_0 y=\frac{y^2}{4h}+\frac{k}{4}\frac{y^3}{3h^2}=\frac{y^2}{4h}\left(1+\frac{k}{3}\frac{y}{h}\right),$$

d'où

$$x=-\theta_0 y+\frac{y^2}{4h}\left(1+\frac{k}{3}\frac{y}{h}\right),$$

équation approchée de la trajectoire, et qui représente *une parabole du troisième degré.*

199. On peut comparer ce résultat à celui obtenu dans le vide: dans ce dernier cas

$$x = -y\,\text{tang.}\theta_0 + \frac{y^2}{4h}\,(1+\text{tang.}^2\theta_0):$$

observant que tang $\theta_0 = \theta_0$, et qu'on peut négliger tang $^2\theta_0$; cette valeur se réduit à

$$x = -y\theta_0 + \frac{y^2}{4h},$$

équation à laquelle se réduit en effet celle que nous venons de trouver lorsqu'on pose $k=0$, ou $\Omega=\infty$.

200. Enfin on peut toujours trouver une hyperbole qui diffère très-peu de la véritable trajectoire, en effet: de l'équation de la parabole on tire

$$\frac{y^2}{4h} = \frac{x+\theta_0 y}{1+\frac{k}{3}\frac{y}{h}} = (x+\theta_0 y)\left(1-\frac{k}{3}\frac{y}{h}\right);$$

en considérant $\frac{y}{h}$ comme une quantité dont on peut négliger le carré, d'où

$$\frac{y^2}{4h} + \frac{k}{3}\frac{y}{h}(x+\theta_0 y) = x+\theta_0 y = \frac{y^2}{4h} + \frac{kxy}{3h} + \frac{k}{3}\frac{\theta_0}{h}y^2,$$

équation d'*une hyperbole qui a une asymptote verticale*.

201. On peut remarquer que l'équation

$$\omega^n = \omega_0^n\,\{1+k(\theta-\theta_0)\}$$

étant indépendante de n, et les autres équations ne renfermant pas n, la nature de la courbe est la même, quel que soit cet exposant.

CHAPITRE III.

MOUVEMENT D'UN CORPS PESANT SOUMIS A L'ACTION DE FORCES CENTRALES, LOIS DE KEPLER, MOUVEMENT DES PLANÈTES, GRAVITATION UNIVERSELLE.

—

§ Ier.

Attractions et répulsions vers des centres fixes.

202. On a dans tous les cas possibles

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X},\ m\frac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{Y},\ m\frac{d^2z}{dt^2}=\mathrm{Z},$$

et

$$\omega^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2},\ \omega d\omega=dx\frac{d^2x}{dt^2}+dy\frac{d^2y}{dt^2}+dz\frac{d^2z}{dt^2}$$

ou

$$m\omega d\omega=\frac{1}{m}\,d(\omega^2)=m.\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dt^2}=\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz,$$

et nous avons vu de plus que lorsque le deuxième membre est une différentielle exacte, le produit de la masse par la différence des carrés des vitesses en deux points de la trajectoire, ou la variation de la force vive, peut se déterminer seulement au moyen des coordonnées de ces deux points, et sans connaître la courbe que le mobile suit en passant d'un point à un autre : nous allons voir que lorsque les forces qui agissent

sur le mobile émanent de centres fixes, la formule est une différentielle exacte.

Fig. 57. Considérons en premier lieu un point matériel A, sollicité par une force répulsive P, dirigée vers un centre fixe C. Soient a, b, c; les coordonnées de ce point, x, y, z celles du point A et λ, μ, ν les angles de la force avec les axes, on aura

$$\cos.\lambda = \frac{X}{P} = \frac{x-a}{r}, \quad \cos.\mu = \frac{Y}{P} = \frac{y-b}{r}, \quad \cos.\gamma = \frac{Z}{P} = \frac{z-c}{r}$$

d'où

$$X = P.\frac{x-a}{r}, \quad Y = P.\frac{y-b}{r}, \quad Z = P.\frac{z-c}{r},$$

en substituant dans la formule générale, il vient

$$\tfrac{1}{2} d(m\omega^2) = \frac{P(x-a)\,dx + P(y-b)\,dy + P(z-c)\,dz}{2r},$$

mais d'un autre côté

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

et

$$rdr = (x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz,$$

ainsi

$$\tfrac{1}{2} md(\omega^2) = Pdr,$$

et par suite

$$m\omega^2 - m\omega_0^2 = 2\int_{r_0}^{r} P\,dr,$$

dans le cas où P est une force attractive, elle devient évidemment

$$m\omega^2 - m\omega_0^2 = -2\int_{r_0}^{r} P\,dr.$$

Supposons maintenant le mobile sollicité par plusieurs forces répulsives R, R′, R″, etc., dirigées vers des

centres fixes dont les distances au mobile sont r, r', r'', etc., et les coordonnées abc, $a'b'c'$, etc., dans ce cas

$$X = R\left(\frac{x-a}{r}\right) + R'\left(\frac{x'-a'}{r'}\right) + \text{etc. } Y = R\left(\frac{y-b}{r}\right)$$
$$+ R'\left(\frac{y'-b'}{r'}\right) + \text{etc. } Z = R\left(\frac{z-c}{r}\right) + R'\left(\frac{z'-c'}{r'}\right) + \text{etc.}$$

et comme d'ailleurs

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,\quad r'^2 = (x'-a')^2 + (y'-b')^2 + (z'-c')^2 \text{ etc.},$$

on aura

$$\tfrac{1}{2}d(m\omega^2) = Rdr + R'dr' + \text{etc.},$$

ou bien

$$m\omega^2 - m\omega_0^2 = 2\int_{r_0}^{r} Rdr + 2\int_{r'_0}^{r'} R'dr' + \text{etc.},$$

et si l'on veut embrasser le cas des forces attractives

$$m\omega^2 - m\omega_0^2 = \pm 2\int_{r_0}^{r} Rdr \pm 2\int_{r'_0}^{r'} R'dr' + \text{etc. :}$$

or, R, R', etc., sont des fonctions de r, r', etc. Ainsi, comme nous l'avions annoncé, les formules sont des différentielles exactes.

203. Il est encore facile de démontrer que la même chose a lieu pour des forces perpendiculaires à des plans fixes et fonctions des distances du mobile à ces plans. On peut déduire ce cas du précédent : en effet, nous avons trouvé Fig 53.

$$\tfrac{1}{2}d(m\omega^2) = Rdr + R'dr' + \text{etc.};$$

supposons qu'avec un rayon ρ on décrive une sphère du centre fixe C, on a

$$r = \rho + s,\quad dr = ds,$$

d'où

$$\frac{1}{2} d(m\omega^2) = \mathrm{R}ds + \mathrm{R}'ds' + \text{etc.},$$

ou bien, parce que R, R', etc., sont fonction de s, s', etc.,

$$\frac{1}{2} d(m\omega^2) = sds + s'ds' + \text{etc.},$$

cette équation ayant lieu quel que soit ρ, on peut supposer $\rho = \infty$, et alors les sphères se réduisent à des plans perpendiculaires aux forces.

Fig. 59. On peut encore parvenir directement à ce résultat. Considérons une seule force R supposée répulsive, en appelant toujours λ, μ, ν les angles de cette force avec les axes, on a

$$\cos.\mathrm{V} = \frac{\cos\lambda(x-a) + \cos.\mu(y-b) + \cos.\nu(z-c)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}};$$

d'ailleurs,

$$r = \mathrm{AC}\cos.\mathrm{V} = \cos.\mathrm{V}\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

ainsi

$$r = (x-a)\cos.\lambda + (y-b)\cos.\mu + (z-c)\cos.\nu$$

et

$$dr = \cos.\lambda dx + \cos.\mu dy + \cos.\nu dz;$$

de plus

$$\mathrm{X} = \mathrm{R}\cos.\lambda,\ \ \mathrm{Y} = \mathrm{R}\cos.\mu,\ \ \mathrm{Z} = \mathrm{R}\cos.\nu,$$

donc

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = \frac{1}{2} d(m\omega^2) = \mathrm{R}(\cos.\lambda dx + \cos.\mu dy + \cos.\nu dz) = \mathrm{R}dr:$$

on passe facilement au cas de plusieurs forces attractives ou répulsives.

204. Revenons au cas d'un mobile sollicité par une force dirigée vers un centre fixe.

Fig 60. Il est évident que la trajectoire est comprise dans le

plan passant par la direction de la vitesse initiale du mobile et par le point fixe. Nous allons en déduire un théorème remarquable.

Reprenons les équations

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X}=\mathrm{P}\,\frac{x}{r},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{Y}=\mathrm{P}\frac{y}{r},$$

qui ont lieu en supposant l'origine des coordonnées au point fixe : multipliant la première par $-y$, la deuxième par x, et ajoutant il vient

$$m\left(\frac{xd^2y-yd^2x}{dt^2}\right)=0=md\frac{\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)}{dt},$$

ou

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=\text{const.}=\mathrm{C}.$$

Cette constante peut être déterminée comme il suit : en appelant δ l'angle de la vitesse avec la force supposée répulsive, et r_0, ω_0, δ_0. Les valeurs de r, ω et δ correspondants à la position primitive oC de r, on a

$$\cos.\delta=\frac{xdx+ydy}{r\omega dt},\quad \sin.\delta=\sqrt{1-\cos.^2\delta},$$

d'où

$$r\omega\sin.\delta=\sqrt{r^2\omega^2-r^2\omega^2\cos.^2\delta}$$

$$=\sqrt{\frac{(x^2+y^2)(dx^2+dy^2)-(xdx+ydy)^2}{dt^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2dy^2+y^2dx^2-2xydydx}{dt^2}}$$

$$=\pm\frac{xdy-ydx}{dt}=\mathrm{C}=r_0\omega_0\sin.\delta_0.$$

Cela posé, pour plus de simplicité employons les coordonnées polaires, alors en appelant p l'angle du rayon vecteur r avec l'axe des x, on a

$$x = r\cos.p,\quad y = r\sin.p,$$

d'où

$$dx = \cos.pdr - r\sin.pdp,\quad dy = \sin.pdr + r\cos.pdp,$$

multipliant la première par $-y$, et la deuxième par x, et ajoutant il vient

$$xdy - ydx = r^2dp.$$

Supposons qu'au bout du temps t le rayon vecteur soit passé de la position oC à la position oA, son extrémité a décrit une certaine courbe, et on a un certain secteur CoA. Donnons à p un accroissement très-petit Δp, r deviendra $r+\Delta r$, et le secteur BoA pourra, sans erreur sensible, être considéré comme un secteur circulaire : alors, en appelant Ω le secteur CoA, on aura

$$\text{B}o\text{A} = \Delta\Omega = \frac{1}{2}r^2dp = \frac{1}{2}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}cdt,$$

et

$$d\Omega = \frac{1}{2}cdt,$$

d'où en intégrant $\Omega = \frac{1}{2}ct$, d'où résulte cette conséquence remarquable que les *aires décrites sont proportionnelles au temps*.

On peut parvenir autrement au même résultat, car le secteur BoA étant sensiblement égal au triangle BoA, on a

$$\Delta\Omega = \frac{1}{2}r(r+\Delta r)\sin.(\text{A}o\text{B}),$$

or,

$$\cos.\mathrm{AoB}=\frac{x(x+\Delta x)+y(y+\Delta y)}{r(r+\Delta r)}=\frac{xx'+yy'}{rr'},\ \sin.^2\mathrm{AoB}$$

$$=\frac{r^2r'^2-(xx'+yy')^2}{r^2r'^2}=\frac{(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)}{r^2r'^2}-\frac{(xx'+yy')^2}{r^2r'^2}$$

$$=\frac{(xy'-x'y)^2}{r^2r'^2},\ \sin.\mathrm{AoB}=\pm\frac{xy'-y'x}{rr'}$$

$$=\frac{x(y+\Delta y)-y(x+\Delta x)}{r(r+\Delta r)}=\frac{x\Delta y-y\Delta x}{r(r+\Delta r)};$$

par conséquent

$$\Delta\Omega=\frac{1}{2}(x\Delta y-y\Delta x),$$

ou

$$d\Omega=\frac{1}{2}(xdy-ydx)=\frac{1}{2}\mathrm{C}dt \quad \text{et} \quad \Omega=\frac{1}{2}ct.$$

205. Réciproquement *si les aires décrites sont proportionnelles au temps, la force est dirigée vers un centre fixe* (c'est-à-dire vers l'origine des coordonnées d'après nos hypothèses) : en effet, nous avons d'après ce qui précède,

$$d\Omega=\frac{1}{2}cdt,$$

ou bien

$$\frac{xdy-ydx}{dt}=\mathrm{C},$$

ou bien encore

$$\frac{xd^2y-yd^2x}{dt^2}=0,$$

mais on a aussi

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X},\ m\frac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{Y},$$

ainsi l'équation précédente devient

$$x\mathrm{Y}-y\mathrm{X}=0 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{\mathrm{X}}=\frac{y}{\mathrm{Y}}=\pm\frac{r}{\mathrm{P}},$$

d'où l'on tire

$$X = \pm P\frac{x}{r},\ Y = \pm P\frac{y}{r},$$

donc, etc.

206. Nous venons de voir qu'un point matériel sollicité par une force dirigée vers un centre fixe décrit une courbe plane, de manière que les aires décrites sont proportionnelles au temps, et inversement que tout point matériel décrivant une courbe plane, de sorte que les aires soient proportionnelles au temps, est sollicité par une force dirigée vers un centre fixe. On peut aller plus loin et démontrer que, *si dans la directe on donne de plus la nature de la force, on en déduit celle de la courbe décrite*, et que *dans la réciproque la nature de la force se déduit* de celle de *la courbe.*

En effet, nous avons généralement $\omega d\omega = -\varphi dr$

$$\omega^2 = \frac{dx^2+dy^2}{dt^2};$$

la première donne

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\int_{r_0}^{r} \varphi dr,$$

et la deuxième devient en passant aux coordonnées polaires

$$\omega^2 = \frac{dr^2+r^2dp}{dt^2},$$

mais de plus $r^2dp = cdt$ d'où

$$dt = \frac{r^2dp}{c};$$

substituant cette valeur dans celle de ω, il vient

$$\omega^2 = c^2 \cdot \frac{(dr^2+r^2dp^2)}{r^4dp^2} = \frac{c^2}{r^2} + \frac{c^2\,dr^2}{r^4dp^2} \ (\alpha),$$

$$\frac{c^2\,dr^2}{r^4dp^2} = \omega^2 - \frac{c^2}{r^2} = \omega_0^2 - \frac{c^2}{r^2} - 2\int_{r_0}^{r} \varphi dr,$$

ou

$$\pm \frac{c\,dr}{r^2dp} = \pm \sqrt{\left(\omega_0^2 - 2\int_{r_0}^{r} \varphi dr - \frac{c^2}{r^2}\right)} = -\frac{d\left(\frac{c}{r}\right)}{dp}$$

ou bien

$$\frac{d\left(\frac{c}{r}\right)}{dp} = \mp \sqrt{\left(\omega_0^2 - 2\int_{r_0}^{r} \varphi dr - \frac{c^2}{r^2}\right)},$$

et

$$dp = \mp \frac{d\left(\frac{c}{r}\right)}{\left(\omega_0^2 - 2\int_{r_0}^{r} \varphi dr - \frac{c^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Mais d'après nos suppositions on donne la valeur de φ en fonction de r, ainsi cette équation est une relation entre p et r, c'est-à-dire l'équation polaire de la courbe décrite.

La réciproque est également vraie, car nous avons

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{d(\omega^2)}{dr},$$

il ne reste donc qu'à avoir ω en fonction de r, ce qui revient à connaître la nature de la courbe, puisque l'équation de cette courbe étant une relation entre p et r, on pourra dans (α) exprimer p en fonction de r, d'où l'on déduira la valeur de ω demandée.

§ II.

Lois de Kepler, mouvement des planètes.

207. Les astronomes ont établi, d'après l'observation, les lois géométriques des mouvements des planètes autour du soleil et des satellites autour des planètes. Ces mouvements s'accomplissent à fort peu près dans des orbites elliptiques, et sont assujettis à des conditions générales, appelées lois de *Kepler*. *Newton* a déterminé, d'après ces lois, la cause mécanique de ces mouvements, c'est-à-dire la nature des forces dont les corps planétaires étaient animés, et des actions qu'ils exerçaient les uns sur les autres. Il a montré que ces actions étaient le résultat d'une force d'attraction mutuelle existant entre toutes les parties des corps, et dont l'intensité était réciproque au carré de la distance de ces parties.

Les lois de Kepler sont au nombre de trois, dont voici les énoncés :

1° Les planètes se meuvent dans des courbes planes, et leurs rayons vecteurs décrivent autour du centre du soleil, des aires proportionnelles au temps;

2° Les orbites ou trajectoires sont des ellipses dont le soleil occupe un des foyers ;

3° Les carrés du temps des révolutions autour du soleil sont entre eux comme les cubes des grands axes des orbites.

Ces lois se rapportent au mouvement du centre de gravité des planètes, et c'est du mouvement de ce point que nous entendons parler.

208. De la première de ces lois, et d'après ce qui a

été démontré dans le paragraphe précédent, il résulte que *la force qui produit le mouvement d'une planète est dirigée vers le centre du soleil.*

209. De même, d'après ce qui a été démontré dans le paragraphe précédent, la deuxième loi donne le moyen de déterminer les variations de cette force, en effet : supposons que la trajectoire soit l'ellipse BDAE ; plaçons l'origine des coordonnées au centre du soleil supposé au point F, foyer de l'ellipse. Soit P une position de la planète, Fig 61.

$$AC=a,\ CF=a\varepsilon,$$

ε désignant l'excentricité, c'est-à-dire le rapport de la distance des foyers au grand axe, p l'angle variable du rayon vecteur r avec l'axe des x et P l'angle constant de ce dernier avec le grand axe de l'ellipse. Cela posé, on a

$$\cos.(\mathrm{PFF'})=\frac{r^2+4a^2\varepsilon^2-(2a-r)^2}{4a\varepsilon r}$$

d'où

$$\cos.(\mathrm{PFA})=\cos.(p-\mathrm{P})=\frac{(2a-r)^2-r^2-4a^2\varepsilon^2}{4a\varepsilon r}$$

$$=\frac{4a^2(1-\varepsilon^2)-4ar}{4a\varepsilon r}=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon r}-\frac{1}{\varepsilon},$$

d'où

$$(a)\quad \varepsilon\cos.(p-\mathrm{P})=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{r}-1$$

pour avoir la vitesse ω il faut connaître $\frac{dp}{dr}$: or, en différentiant il vient

$$\varepsilon\sin.(p-\mathrm{P})\,dp=\frac{a(1-\varepsilon^2)dr}{r^2},\quad \varepsilon\sin.(p-\mathrm{P})=\frac{a(1-\varepsilon^2)dr}{r^2dp}$$

$$=\frac{b}{r^2}\frac{dr}{dp},$$

en posant $a\,(1-\varepsilon^2)=b$: alors

$$\varepsilon\cos.(p-P)=\frac{b}{r}-1,$$

élevant ces deux équations au carré, et ajoutant il vient

$$\varepsilon^2=\frac{b^2}{r^2}\left(1+\frac{dr^2}{r^2dp^2}\right)-\frac{2b}{r}+1,$$

ou en remplaçant la quantité entre parenthèses par sa valeur

$$\varepsilon^2=\frac{b^2}{c^2}\,\omega^2-\frac{2b}{r}+1\,;$$

différentiant, on obtient

$$\frac{b^2}{c^2}\,d(\omega^2)+\frac{2b}{r^2}\,dr=0,$$

ce qui revient à

$$\frac{1}{2}\,\frac{d(\omega^2)}{dr}=-\frac{c^2}{b}\times\frac{1}{r^2}=-\frac{k}{r^2},\ \left(k=\frac{c^2}{b}\right):$$

mais, d'après ce que nous avons vu

$$\varphi=-\frac{1}{2}\,d\,\frac{(\omega^2)}{dr},$$

donc

$$\varphi=\frac{k}{r^2}:$$

donc *la force qui emporte une planète dans l'espace est inversement proportionnelle au carré de sa distance au centre du soleil.*

210. En s'appuyant sur la troisième loi de Kepler, il est facile de démontrer que cette force est la même pour toutes les planètes, ou, en d'autres termes, qu'elle ne dépend que de leur distance. En effet, nous avons

trouvé $\Omega = \frac{1}{2}ct$; ainsi, si T est le temps de la révolution d'une planète, l'aire de l'ellipse décrite sera $\frac{1}{2}cT$; mais cette aire est aussi égale au produit de π par le produit des demi-axes, ou à

$$\pi a^2 \sqrt{(1-\varepsilon^2)}\ ;$$

on a donc l'égalité

$$\pi a^2 \sqrt{(1-\varepsilon^2)} = \frac{1}{2}cT,$$

d'où

$$c = \frac{2\pi a^2 \sqrt{(1-\varepsilon^2)}}{T},$$

et

$$c^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2)}{T^2},$$

et par suite

$$k = \frac{c^2}{b} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\ :$$

or, $\frac{a^3}{T^2}$ est une quantité constante d'après la troisième loi de Kepler; ainsi k ne varie pas en passant d'une planète à une autre, donc il en est de même de la force φ.

La force motrice de chaque planète est donc indépendante de sa nature particulière, et proportionnelle à sa masse comme les poids à la surface de la terre. Elle varie d'une planète à une autre, suivant la même loi que d'une position à une autre de la même planète. Ainsi les trois lois de Kepler font connaître complétement la force qui retient les planètes dans leurs orbites.

211. Newton a étendu les lois de Kepler et celles qui

s'en déduisent aux comètes dans leur mouvement autour du soleil, et aux satellites autour de leurs planètes respectives : de plus on étend ces mêmes lois aux étoiles doubles, dans lesquelles un mouvement révolutif de l'une d'elles autour de l'autre a été reconnu.

Les comètes dans leur mouvement ne diffèrent des planètes qu'en ce qu'elles ne sont pas constamment visibles : c'est là ce qui rend très-difficile la détermination de leurs orbites ; quelques-unes ne sont pas dans ce cas : quant aux autres, on calcule leur mouvement en prenant pour trajectoire dans l'étendue où elle est visible une parabole dont le foyer est au centre du soleil, en supposant toujours les aires décrites proportionnelles au temps.

Fig 62. 212. Nous avons vu que les planètes décrivent des ellipses, de manière qu'entre les coordonnées de la trajectoire on a constamment les relations

$$(1)\ \varepsilon\cos.(p-P)=\frac{b}{r}-1 \quad \text{et} \quad (2)\ r^2dp=cdt:$$

il s'agit maintenant d'avoir une relation finie entre p et t ; or, en différentiant l'équation (1), on obtient

$$\varepsilon\sin.(p-P)=\frac{bdr}{r^2dp},$$

d'où

$$r^2dp=\frac{bdr}{\varepsilon\sin.(p-P)},$$

substituant dans

$$(2)\ \frac{bdr}{\varepsilon\sin.(p-P)}=cdt=\frac{bdr}{\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon^2\cos.^2(p-P)}}$$

$$=\frac{bdr}{\sqrt{\varepsilon^2-\left(\frac{b}{r}-1\right)^2}}.$$

Cette équation, étant intégrable, puisque les variables sont séparées, nous fournira une relation entre r et t qui, jointe à l'équation (2), nous conduira à la relation demandée. Les calculs étant très-compliqués, nous nous contenterons de considérer le cas où l'excentricité ε est assez petite pour qu'on puisse en négliger le carré et les puissances supérieures : c'est d'ailleurs ce qui arrive pour la plupart des planètes. De l'équation (1) on tire

$$r=\frac{b}{1+\varepsilon\cos.(p-\mathrm{P})},$$

ou en posant

$$\mathrm{P}=0,\ r=\frac{b}{1+\varepsilon\cos.p}=b(1-\varepsilon\cos.p),$$

en négligeant la puissance de ε supérieure à la première : on déduit de là

$$r^2=b^2(1-2\varepsilon\cos.p+\varepsilon^2\cos.^2p)=b^2(1-2\varepsilon\cos.p):$$

substituant cette valeur dans (2), il vient

$$b^2(1-2\varepsilon\cos.p)dp=cdt,$$

ou

$$(1-2\varepsilon\cos.p)\,dp=\frac{cdt}{b^2}=\frac{c}{a^2(1-\varepsilon^2)^2}\,dt=\frac{c}{a^2}dt,$$

d'ailleurs

$$c^2=kb=ka(1-\varepsilon^2)=ka,\quad c=k^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}};$$

ainsi

$$(1-2\,\varepsilon\cos.p)dp=\frac{k^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}}{a^2}\,dt=\frac{k^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}\,dt:$$

opérant l'intégration à partir de $t=0$, c'est-à-dire à partir du point A de départ de la planète, on a pour résultat

$$p - 2\varepsilon \sin. p = \frac{k^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

ou

$$p = \left(\frac{k^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}\right) t + 2\varepsilon \sin p \qquad (\alpha).$$

Dans le cas où $\varepsilon = 0$, cette équation devient

$$(3) \quad p = \left(\frac{k}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}} t;$$

dans ce cas, la trajectoire est un cercle dont le rayon est a; car alors les angles ou les aires parcourus sont proportionnels au temps. Dans le cas de l'ellipse, si on néglige dans sin. p les termes en ε, ou dans 2ε sin. p les carrés de ε, on aura

$$p = \left(\frac{k}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}} t + q\varepsilon,$$

d'où

$$\sin. p = \sin. \left(\frac{k}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}} t + q\varepsilon :$$

posons

$$\left(\frac{k}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}} t = b,$$

alors

$$\sin. p = s\,(b + q\varepsilon) = \sin. b \cos. q\varepsilon + \sin. q\varepsilon \cos. b$$

$$= \sin. b \left\{ 1 - \frac{q\,\varepsilon^2}{1.2} - \text{etc.}, \right\} + \cos. b \left\{ q\varepsilon - \frac{q^3 \varepsilon^3}{1.2.3} \ldots\ldots \right\};$$

ainsi

$$\sin. \left\{ \left(\frac{k}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}} t + q\varepsilon \right\} = \sin. b + q\varepsilon \cos. b = \sin. p\ ;$$

substituant dans (α), cette équation devient

$$(4)\quad p=\left(\frac{k}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}t+2\epsilon\,\text{sin.}\left(\frac{k}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}t.$$

213. Pour observer le mouvement de la planète, on Fig 62.
a imaginé un astre fictif décrivant autour du soleil le cercle (3), pendant que la planète décrit l'ellipse (4), et on a comparé ces deux mouvements. D'abord, au premier instant, c'est-à-dire au point de départ des deux astres, les deux rayons recteurs coïncident : lorsque l'astre fictif a parcouru une demi-circonférence,

$$p=\pi=\left(\frac{k}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}t,$$

d'où

$$\text{sin.}\left(\frac{k}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}t=0,$$

par conséquent les valeurs (3) et (4) de p coïncident, c'est-à-dire que lorsque l'astre fictif est parvenu en B', la planète est en B; de même pour $p=2\pi$, les deux valeurs de p étant encore les mêmes, les deux astres parcourront dans le même temps la deuxième moitié de leurs orbites : de plus, dans la première demi-révolution,

$$p=\left(\frac{k}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}t$$

étant compris entre 0 et π, il s'ensuit que

$$\text{sin.}\left(\frac{k}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}t$$

est positif, tandis que le contraire a lieu pour l'autre demi-révolution. Ainsi, dans le premier cas, le rayon vecteur correspondant à l'astre réel est en avant de celui de l'astre fictif, et inversant dans le deuxième cas.

Ajoutons que, d'après la marche des sinus, l'angle des deux rayons vecteurs va en augmentant dans le premier et troisième quart de révolution, et en diminuant dans le deuxième et quatrième, en sorte que le maximum de cet angle a lieu lorsque le rayon de l'astre fictif coïncide avec l'ordonnée du foyer. Cet angle variable s'appelle *l'équation du centre :* les rayons recteurs des deux astres coïncidants prennent des noms particuliers. Le point A s'appelle *périhélie*, et le point B *aphélie*. L'angle P se nomme *longitude*, et l'angle variable (p—P) est désigné sous le nom d'*anomalie vraie*. Si l'on appelle T le temps de la révolution d'une planète, et qu'on fasse

$$n = \frac{2\pi}{T},$$

cette constante n sera la vitesse moyenne angulaire, et nt le *moyen mouvement* de la planète.

En prenant le jour moyen pour unité de temps, et mettant 360° au lieu de 2π, on a, relativement à la terre,

$$T = 365{,}256374, \quad n = 0^{\circ}59'8'';$$

cette valeur de T est la durée de l'année *sidérale*, ou l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux retours consécutifs du soleil à une même étoile dans son mouvement apparent autour de la terre. L'intervalle compris entre deux retours consécutifs à un même *équinoxe* est plus court, à cause que les points équinoxiaux ont sur l'*écliptique* un mouvement rétrograde, ou en sens contraire de celui du soleil. En prenant 50″,22427 pour la *précession* annuelle en 1800, et observant que le rayon recteur du soleil emploie

$0^{j},014158$ à décrire ce petit angle, il en résulte $365^{j}242216$ pour la longueur de l'année *équinoxiale* au commencement de ce siècle L'année *sidérale* est constante; mais la précession des équinoxes varie un peu, et par conséquent aussi l'année équinoxiale. La longueur diminue à peu près d'une demi-seconde par siècle.

§ III.

Mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale.

214. Le problème qu'il s'agit de résoudre est l'inverse de celui du paragraphe précédent, c'est-à-dire qu'on suppose qu'une force constante dirigée vers un centre fixe, et donnée en fonction de la distance du mobile à ce point, est appliquée à ce mobile, et on se propose d'en conclure la trajectoire et la loi du mouvement.

Nous avons démontré, en effet, dans le premier paragraphe, que cette détermination est toujours possible, et nous sommes parvenus à l'équation

$$dp = \mp \frac{d\left(\frac{c}{r}\right)}{\left(\omega_0^2 - 2\int_{r_0}^{r} \varphi dr - \frac{c^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}}:$$

si nous posons $\varphi = \frac{k}{r^2}$, supposition qui se rapporte aux lois de Kepler, alors

$$\int \varphi dr = k\int \frac{dr}{r^2} = -\frac{k}{r} + c,\quad 2\int_{r_0}^{r} \varphi dr = -\frac{2k}{r} + \frac{2k}{r_0},$$

et par suite

$$dp = \mp \frac{d\left(\frac{c}{r}\right)}{\left(\omega_0^2 - \frac{2k}{r_0} - \left(\frac{c^2}{r^2} - \frac{2k}{r}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \mp \frac{d\left(\frac{c}{r}\right)}{\left\{\omega_0^2 - \frac{2k}{r_0} + \frac{k^2}{c^2} - \left(\frac{c}{r} - \frac{k}{c}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} :$$

la somme des trois premiers termes du dénominateur doit être une quantité positive, puisque p doit être réel, et c'est ce qui est en effet, car

$$\omega_0^2 - \frac{2k}{r_0} + \frac{k^2}{c^2} = \omega_0^2 - \frac{2k}{r_0} + \frac{k^2}{\omega_0^2 r_0^2 \sin.^2 \delta_0} ;$$

or, cette quantité est plus grande que

$$\omega_0^2 - \frac{2k}{r_0} + \frac{k^2}{\omega_0^2 r_0^2},$$

qui est un carré parfait, et par conséquent positive; donc elle est elle-même positive. Cela posé, $\frac{k}{c}$ étant une constante, on peut écrire l'équation précédente sous la forme

$$dp = \mp \frac{d\left(\frac{c}{r} - \frac{k}{c}\right)}{\left\{\frac{h^2}{c^2} - \left(\frac{c}{r} - \frac{k}{c}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

en posant

$$\omega_0^2 - \frac{2k}{r_0} + \frac{k^2}{c^2} = \frac{h^2}{c^2} ;$$

or, d'après ce que l'on sait,

$$\int - \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc.cos.} \frac{x}{a} :$$

ainsi l'équation précédente intégrée nous donne

$$p-P=\pm\frac{\text{arc.cos.}\frac{c}{r}-\frac{k}{c}}{\frac{h}{c}},$$

en appelant P la valeur de p correspondante à la position initiale du rayon vecteur, ou

$$p-P=\pm\,\text{arc.cos.}\left(\frac{c^2}{h}\frac{1}{r}-\frac{k}{h}\right),$$

ou bien

$$(1)\ \cos.(p-P)=\frac{c^2}{hr}-\frac{k}{h},$$

ou bien encore

$$\frac{h}{k}\cos.(p-P)=\frac{c^2}{kr}-1:$$

lorsque $p=P$, le premier membre de (1) devient égal à l'unité ; ainsi p se réduit à P pour

$$\frac{c^2}{hr}-\frac{k}{h}=1:$$

l'équation (1) est l'équation polaire de la trajectoire, que nous allons discuter.

215. Il peut arriver que h soit $<$ ou $=$ ou $>$ k : dans le premier cas $\frac{h}{k}<1$, et on peut poser $\frac{h}{k}=\varepsilon$, ε étant une quantité plus petite que l'unité : alors l'équation de la trajectoire devient

$$\varepsilon\cos.(p-P)=\frac{c^2}{k}-1=\frac{b}{r}-1,$$

équation d'une ellipse dont b est le demi-paramètre, et ε l'excentricité, et qui est identique avec l'équation

(*a*) du paragraphe précédent, en remplaçant b par sa valeur $a\,(1-\varepsilon^2)$. Si on pose $p=P$, il vient

$$r=\frac{b}{1+\varepsilon};$$

si au contraire

$$p-P=\frac{\pi}{2},$$

alors $r=b$, c'est-à-dire l'ordonnée du foyer ou le demi-paramètre.

Dans le deuxième cas, $h=k$ ou $\frac{h}{k}=1$, et on a

$$\cos.(p-P)=\frac{c^2}{kr}-1:$$

si on appelle R la valeur de r correspondante à $p=P$ ou $p-P=0$, il vient

$$1=\frac{c^2}{k}\cdot\frac{1}{R}-1 \quad \text{ou} \quad c^2=2kR,$$

et l'équation devient

$$\cos.(p-P)=\frac{2k}{r}-1,$$

d'où

$$r=\frac{2R}{1+\cos.(p-P)}:$$

Fig. 63. Voyons quelle courbe représente cette équation. Pour cela, soit F l'origine des coordonnées, et en même temps le point d'où émane la force centrale,

$$FA=An=R,$$

P un point de la trajectoire, et SS' une ligne perpendiculaire en n à la droite BA : menons Pm parallèle à SS', et Ph perpendiculaire à la même ligne, on a

$$Fm=r\cos.(p-P);$$

ainsi l'équation de la courbe revient à

$$FP+Fm=2R=Fn=Fm+mn=Fm+Ph,$$

d'où l'on tire

$$PF=Ph:$$

ainsi la courbe est une parabole dont le foyer est en F, le sommet en A, et la directrice la ligne SS'.

Dans le troisième cas, $h>k$, ou $\frac{h}{k}>1$, ou bien $\frac{h}{k}=\varepsilon$, ε étant plus grand que l'unité. L'équation de la courbe est

$$\varepsilon\cos.(p-P)=\frac{c^2}{kr}-1=\frac{b}{r}-1,$$

mais ici

$$b=a(\varepsilon^2-1);$$

ainsi

$$\varepsilon\cos.(p-P)=\frac{a(\varepsilon^2-1)}{\varepsilon}-1:$$

pour interpréter ce résultat, observons que cette équation ne diffère de l'équation (a) que par le signe de a: or, la forme primitive de l'équation (a) était

$$\cos.(p-P)=\frac{(2a-r)^2-r^2-4a^2\varepsilon^2}{4a\varepsilon r};$$

nous pouvons donc prendre pour la courbe qui nous occupe

$$\cos.(p-P)=\frac{(-2a-r)^2-4a^2\varepsilon^2-\varepsilon^2}{-4a\varepsilon r}=\frac{r^2+4a^2\varepsilon^2-(2a+r)^2}{4a\varepsilon r}:$$

cela posé, l'origine étant en F, prenons $FG=2a\varepsilon$; Fig. 64.
P' étant un point de la courbe, nous aurons

$$\cos.(p-P)=\frac{r^2+4a^2\varepsilon^2-\overline{PG}^2}{4a\varepsilon r};$$

ainsi

$$PG=2a+\epsilon,$$

donc

$$PG-FP=2a,$$

par conséquent la trajectoire est une hyperbole dont l'un des sommets est A, et dont les foyers sont F et G.

216. D'après ce qui précède, dans tous les cas la trajectoire est une section conique, et elle est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que h est $<$ ou $=$ ou $> k$. Voici comment on peut interpréter ces résultats d'après une observation de M. *Coriolis;* nous avons

$$\omega_0^2-\frac{2k}{r_0}=\frac{h^2}{c^2}-\frac{k^2}{c^2};$$

ainsi $h<$ ou $=$ ou $>k$ revient à $\omega_0^2 <$ ou $=$ ou $>\frac{2k}{r_0}$: de plus $\omega d\omega=-\varphi dr$; si on suppose un mobile partant de l'état de repos d'une distance a du centre fixe, et parvenu à une distance r_0 de ce centre, on tire de cette équation, en nommant Ω^2 la valeur que prend ω^2 dans ce cas,

$$\Omega^2=-2\int_a^{r_0}\varphi dr=\frac{2k}{r_0}-\frac{2k}{a}:$$

mais si a est supposé très-grand, on peut négliger $\frac{2k}{a}$, et il reste

$$\Omega^2=\frac{2k}{r_0};$$

ainsi $\frac{2k}{r_0}$ désigne la vitesse acquise par un corps partant d'une distance infinie et de l'état de repos en passant à la distance r_0 du centre fixe : la valeur de Ω étant

bien connue, on voit que la trajectoire est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que $\omega_0^2 <$ ou $=$ ou $> \Omega^2$: alors les hypothèses n'ont plus rien de vague.

§ IV.

Attraction universelle, masse des planètes, densité moyenne de la terre.

Disons d'abord un mot du mouvement des satellites.

217. Considérons deux mobiles dont les masses soient m et m', et les coordonnées xyz, $x'y'z'$: si le premier est sollicité par deux forces φ et Φ, et le deuxième par deux forces φ' et Φ, les équations du mouvement seront pour le premier

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi\cos.\lambda + \Phi\cos.L, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi'\cos.\mu + \Phi\cos.M,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \varphi\cos.\nu + \Phi\cos.N,$$

et pour le deuxième

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \varphi'\cos.\lambda' + \Phi\cos.L, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = \varphi'\cos.\mu' + \Phi\cos.M,$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = \varphi'\cos.\nu' + \Phi\cos.N,$$

en appelant λ, μ, ν les angles de la force φ avec les axes des coordonnées, $\lambda'\mu'\nu'$ ceux de la force φ', et L,M,N ceux de la force Φ. Mais si on veut connaître seulement le mouvement relatif de m' par rapport à m, il suffira de déterminer à chaque instant les quantités

$$x'-x, y'-y, z'-z:$$

or, en retranchant deux à deux les équations précédentes, il vient

$$\frac{d^2(x'-x)}{dt^2}=\varphi'\cos.\lambda'-\varphi\cos.\lambda,\ \frac{d^2(y'-y)}{dt^2}=\varphi'\cos.\mu'-\varphi\cos.\mu,$$
$$\frac{d^2(z'-z)}{dt^2}=\varphi'\cos.\nu'-\varphi\cos.\nu;$$

la force Φ n'entrant plus dans ces équations, il en résulte que le mouvement relatif de m' est indépendant de cette force : or, à cause de la grande distance du soleil aux planètes et à leurs satellites, on peut considérer le soleil comme étant à égale distance de ces astres, et les droites menées du soleil à une planète et à son satellite comme parallèles : il résulte de là que l'action du soleil est la même sur ces deux corps, et qu'ainsi, d'après ce que nous venons de démontrer, le mouvement des satellites autour de la planète étant indépendant de l'attraction du soleil, *le satellite décrira une ellipse, dont la planète occupera un foyer.*

218. Ce que nous venons de dire suppose que la planète est fixe ; comme dans le mouvement des planètes nous n'avons pas eu égard au mouvemeut propre du soleil, voyons si cette circonstance modifie nos raisonnements. Soient xyz les coordonnées du centre de gravité d'une planète, m sa masse, et Φ la force accélératrice résultant de son attraction sur le soleil, $\xi\eta\zeta$ les coordonnées du centre de gravité du soleil, M sa masse, et φ la force accélératrice provenant de son attraction sur la planète, et appelons λ,μ,ν les angles de φ avec les axes : puisque l'action des deux astres a lieu en sens contraires suivant la droite qui joint leurs centres de gravité, on aura

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi\cos.\lambda,\ \frac{d^2y}{dt^2}=\varphi\cos.\mu,\ \frac{d^2z}{dt^2}=\varphi\cos.\nu,\ \frac{d^2\xi}{dt^2}=-\Phi\cos.\lambda,$$
$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=-\Phi\cos.\mu,\ \frac{d^2\xi}{dt^2}=-\Phi\cos.\nu;$$

ces équations déterminent à chaque instant la position des deux astres. Il nous importe seulement de connaître la position de la planète par rapport au soleil, ce que l'on peut faire au moyen des équations suivantes, déduites des précédentes, retranchées deux à deux :

$$\frac{d^2(x-\xi)}{dt^2}=(\varphi+\Phi)\cos.\lambda,\quad \frac{d^2(y-\eta)}{dt^2}=(\varphi+\Phi)\cos.\mu,$$
$$\frac{d^2(z-\zeta)}{dt^2}=(\varphi+\Phi)\cos.\nu:$$

ces équations nous montrent que le mouvement de la planète est le même que si le soleil était fixe et attirait la planète avec une force accélératrice $\varphi+\Phi$. On obtiendrait un résultat analogue pour les satellites.

Le mouvement des satellites autour des planètes étant à fort peu près assujetti aux mêmes conditions que les mouvements des planètes autour du soleil, les résultats précédents conduisent à considérer les mouvements des astres comme étant régis par une force d'attraction mutuelle existante entre toutes les substances matérielles, proportionnelle à la masse des parties qui s'attirent, et réciproque au carré de la distance actuelle de ces parties. Cette hypothèse est développée par le calcul dans les lois du système du monde.

219. La force d'attraction qui s'exerce entre deux corps planétaires doit être regardée comme émanant de toutes les parties de ces corps. Mais leur figure est à peu près sphérique, et il a été démontré que la force d'attraction dont il s'agit peut être supposée émaner du centre des planètes, comme si toute leur masse était concentrée en ce point. D'après cela, considérons deux corps planétaires dont les masses sont respective-

ment M et m, la distance de leurs centres étant désignée par r. La force avec laquelle chacun de ces corps est attiré vers l'autre, exprimée en unités de poids, doit, conformément au principe que l'on vient d'énoncer, être représentée par $f\frac{M.m}{r^2}$, en désignant par f un coefficient constant. Ainsi, ces corps étant supposés céder librement à cette attraction, le premier s'approchera du second en acquérant la vitesse $f\frac{m}{r^2}$ dans l'unité de temps, et le second s'approchera du premier en acquérant la vitesse $f\frac{M}{r^2}$ dans l'unité de temps. Donc, si l'on considère le mouvement relatif du second corps par rapport au premier, c'est-à-dire le mouvement par lequel ce second corps s'approche du premier, regardé comme fixe dans l'espace, il faut considérer ce second corps comme acquérant dans l'unité de temps la somme des deux vitesses précédentes, c'est-à-dire la vitesse

$$\frac{f(M+m)}{r^2}.$$

D'après ce qui précède, M désignant la masse du soleil, m la masse d'une planète, r la distance actuelle des centres de ces deux corps, la force à laquelle sera dû le mouvement de la planète par rapport au soleil doit être capable d'imprimer à la masse de la planète la vitesse $f\left(\frac{M+m}{r^2}\right)$ dans l'unité de temps, on doit avoir

$$\frac{f(M+m)}{r^2}=\varphi+\Phi,$$

mais

$$\varphi+\Phi=\frac{k}{r^2},$$

ainsi,

$$f\frac{(M+m)}{r^2}=\frac{k}{r^2},$$

ou

$$k=\frac{(m+M)}{r^2}f;$$

or,

$$k=\frac{c^2}{b},\ b=a\,(1-\varepsilon^2),\ c^2=\frac{4\pi^2a^4(1-\varepsilon^2)}{T^2};$$

par conséquent

$$k=\frac{4\pi^2a^3}{T^2}=(m+M)f\ \ (\alpha).$$

Le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ varie donc avec la masse m; or les observations qui conduisent à la troisième loi de Kepler prouvent qu'il est sensiblement constant; il faut donc en conclure que les masses des planètes sont très-petites par rapport à celle du soleil : en effet, la masse de Jupiter, la plus considérable de toutes, n'est pas un millième de la masse du soleil.

C'est pour cela que l'attraction mutuelle des planètes ne produit que des *perturbations* ou très-lentes, ou très-peu considérables, dans le mouvement elliptique dû à l'attraction du soleil.

220. La force accélératrice qui provient de l'attraction d'une planète m sur une autre planète m', étant indépendante de la masse m', et proportionnelle à la masse m, on conçoit que les perturbations dues à cette force, et qu'on observe dans le mouvement de m' autour du soleil, peuvent servir à déterminer le rapport de la masse m à celle du soleil. Ainsi, par exemple, d'après la grande inégalité de Saturne, produite par Jupiter, on a trouvé la masse de cette dernière égale à $\frac{1}{1070}$ de celle du soleil.

L'attraction mutuelle des satellites d'une même planète, quand elle en a plusieurs, et l'inégalité d'action du soleil sur chaque satellite et sur sa planète, produisent dans les mouvements des satellites des perturbations analogues à celles des planètes, et l'on peut en déduire les rapports des masses des satellites à celle de la planète dont l'attraction produit leur mouvement. Ce moyen manquant pour la lune, on y supplée par d'autres considérations; par exemple, son action sur les eaux de la mer. Du reste, nous donnerons tout à l'heure les moyens de déterminer les masses des corps planétaires.

Les comètes, à cause de la petitesse de leurs masses, ne produisent aucun effet sensible sur les planètes ; mais les attractions planétaires troublent leur mouvement et influent sur les époques de la réapparition de ces astres.

221. Le rapport entre la masse m d'une planète qui a un satellite et la masse M du soleil, peut être facilement déterminé : soit m' la masse du satellite, et a' le demi-grand axe de l'orbite qu'il décrit autour de la planète, et T' le temps de sa révolution. En faisant usage de l'équation (2) du n° 219, nous aurons

$$f(m+M)=\frac{4\pi^2a^3}{T^2},$$

et de même

$$f(m'+m)=\frac{4\pi^2a'^3}{T'^2}.$$

Divisant ces deux équations l'une par l'autre, il vient

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^3\left(\frac{T'}{T}\right)^2=\frac{M+m}{m+m'}=\frac{M\left(1+\frac{m}{M}\right)}{m\left(1+\frac{m'}{m}\right)}:$$

mais on peut négliger les rapports

$$\frac{m'}{m}, \frac{m}{M},$$

en présence des masses m et M, et on a simplement

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \left(\frac{T'}{T}\right)^2.$$

222. La connaissance de la grandeur du rayon de la terre et de l'intensité de la pesanteur à sa surface fournit le moyen de déterminer les rapports des masses de toutes les parties du système solaire et l'intensité de la pesanteur dans les divers points de ce système. Soit m la masse de la terre, μ la masse d'un corps placé à une petite distance au-dessus de sa surface, et R le rayon de cette surface, ce corps tendra à s'approcher du centre de la terre, en acquérant dans l'unité de temps la vitesse $f\left(\frac{m+\mu}{R^2}\right)$, ou simplement $f\frac{m}{R^2}$. Si μ est très-petit par rapport à m, donc $f\,\frac{m}{R^2} = g$, g désignant la vitesse acquise dans l'unité de temps par les corps graves tombant à la surface de la terre (en faisant abstraction du mouvement de rotation de la terre) : en comparant cette équation à l'équation (2), on a

$$\frac{m}{M+m} = \frac{gR^2T^2}{4\pi^2a^3} = \frac{m}{M\left(1+\frac{m}{M}\right)} = \frac{m}{M},$$

expression du rapport de la masse de la terre à celle du soleil, on trouve $\frac{M}{m} = 337068$.

Soit maintenant une autre planète dont m' est la

masse, a' le demi-grand axe de l'orbite, T' le temps de la révolution, on aura

$$f(M+m')=\frac{4\pi^2a'^3}{T'^2},$$

en mettant pour f sa valeur $\frac{gR^2}{m}$,

$$m'=m\frac{4\pi^2a'^3}{gR^2T'^2}-M.$$

Pour déterminer la vitesse g' qui serait imprimée dans l'unité de temps aux corps tombant à la surface d'une planète dont la masse serait m', et le rayon R', on a

$$g'=\frac{fm'}{R'^2},$$

qui, comparée à

$$\frac{fm}{R^2}=g,$$

donne

$$g'=g.\frac{m'R^2}{mR'^2}.$$

La pesanteur terrestre est un cas particulier de l'attraction universelle; c'est pour cette raison qu'on appelle aussi cette force générale *pesanteur*, ou *gravitation universelle.*

223. On a employé deux méthodes différentes pour évaluer la densité moyenne de la terre: 1° la déviation du fil à plomb causée par l'attraction des montagnes voisines, 2° l'observation des oscillations produites par l'attraction d'un corps. Nous indiquerons succinctement le principe de chacune d'elles.

Soit V le volume de la terre, et π le poids moyen de l'unité de volume de la matière dont elle est formée,

la masse de la terre sera exprimée par $\frac{V\Pi}{g}$, en désignant par g la vitesse imprimée par la gravité aux corps pesants à la surface de la terre. En représentant par v le volume d'une montagne voisine, par Π' le poids moyen de l'unité de volume des matières qui la composent, on aura également $\frac{v\Pi'}{g}$ pour la masse de cette montagne. Si de plus on représente par d la distance du lieu où l'on se trouve au centre de gravité de la montagne, nous devrons concevoir que les corps sont sollicités dans ce lieu : 1° par une force verticale exprimée par

$$f.V\frac{\Pi}{g}.\frac{1}{R^2},$$

f ayant la même valeur que précédemment, et R étant le rayon de la terre ; 2° par une force

$$f.V\frac{\Pi'}{g}.\frac{1}{d^2},$$

due à l'action de la montagne, que nous pouvons supposer horizontale sans erreur sensible. Le fil à plomb devant se diriger suivant la résultante de ces deux forces, nous aurons, en désignant par α l'angle de ce fil avec la verticale,

$$\text{tang.}\alpha = \frac{v\Pi R^2}{V\Pi d^2},$$

équation d'où l'on déduira le rapport $\frac{\Pi}{\Pi'}$, de la densité moyenne de la terre à celles des matières dont la montagne est formée.

Maskeline a fait en Écosse des observations de ce genre, dont il a conclu que la densité moyenne de la terre est quatre à cinq fois plus grande que celle de l'eau.

Fig. 63. 224. Voici sur quoi repose la deuxième méthode : Concevons une verge AA considérée comme un levier rigide et sans masse aux extrémités duquel on a placé deux petits corps égaux entre eux. Ce levier est suspendu par son milieu C au moyen d'un fil très-fin. Admettons maintenant que l'on présente aux deux corps A deux masses égales D ; l'attraction de ces masses tend à faire sortir le levier AA de sa position naturelle, et à le transporter dans une position voisine BB, en faisant tordre le fil de suspension. Celui-ci résistant à cette torsion, les corps placés aux extrémités du levier prennent par l'effet des actions opposées de l'attraction des masses D, et de la résistance du fil, un mouvement dont l'observation peut conduire à la solution de la question dont il s'agit.

Les expériences de *Coulomb* apprennent en effet que la résistance du fil à la torsion est proportionnelle à l'angle de torsion. Cela posé, considérons le mouvement de l'un des corps A : soit m sa masse, M la masse placée en D, r le rayon CA, d la distance AD, et θ l'angle de torsion au bout du temps T, angle supposé très-petit : d'après cela, l'attraction exercée par la masse D pourra être considérée comme dirigée dans le sens du mouvement de la petite masse A, et on aura pour l'équation du mouvement de cette masse

$$m\,\frac{rd^2\theta}{dt^2} = \frac{f\mathrm{M}.m}{(d-r\theta)^2} - s.\theta,$$

f désignant toujours le même coefficient, s la résistance

du fil à la torsion lorsque l'angle de torsion est égal à 1. Si on néglige les puissances supérieures de θ, cette équation revient à

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{fM}{d^2r}-\left(\frac{s}{mr}-\frac{2fM}{d^3}\right)\theta.$$

Pour l'intégrer, c'est-à-dire pour trouver une expression de θ en fonction de t, par laquelle l'équation soit satisfaite, et qui s'accorde également avec les données de l'état initial, on posera

$$\theta=A+B\sin.pt+C\cos.qt,$$

A, B, C, p et q étant des constantes, et l'on s'assurera facilement que cette expression satisfait à l'équation différentielle, pourvu que l'on ait

$$A=\frac{\frac{f.M}{d^2r}}{\frac{s}{mr}-\frac{2fM}{d^3}} \quad \text{et} \quad p=q=\sqrt{\frac{s}{mr}-\frac{2fM}{d^3}}.$$

L'expression générale de θ est donc

$$\theta=\frac{\frac{fM}{d^2r}}{\frac{s}{mr}-\frac{2fM}{d^3}}+B\sin.t\sqrt{\frac{s}{mr}-\frac{2fM}{d^3}}$$

$$+C\cos.t\sqrt{\frac{s}{mr}-\frac{2fM}{d^3}};$$

les constantes B, C se détermineront d'après l'état initial du corps A. Supposons que quand $t=0$, la vitesse de ce corps soit nulle, l'expression précédente ne pourra satisfaire à cette condition, à moins que l'on n'ait $B=0$. Supposons de plus que la valeur initiale de θ soit également nulle, il faudra alors que l'on ait

$$C = \frac{\frac{fM}{d^2 r}}{\frac{s}{mr} - \frac{2fM}{d^3}};$$

ainsi, la valeur complète de θ sera définitivement

$$\theta = \frac{\frac{fM}{d^2 r}}{\frac{s}{mr} - \frac{2fM}{d^3}}\left(1 - \cos . t \sqrt{\frac{s}{mr} - \frac{2fM}{d^3}}\right).$$

Cette équation fait connaître la nature du mouvement périodique que prendra le corps A. Le levier oscille autour d'une position qui forme avec la position primitive AA l'angle

$$\frac{\frac{fM}{d^2 r}}{\frac{s}{mr} - \frac{2fM}{d^3}}.$$

et cette même expression est aussi celle de l'écart de ce levier à partir de cette position intermédiaire. On peut observer l'amplitude de ces oscillations, en la désignant par Ω; on aura donc

$$\Omega = 2 \frac{\frac{fM}{d^2 r}}{\frac{s}{mr} - \frac{2fM}{d^3}}:$$

la durée des oscillations dont il s'agit est d'ailleurs, comme on le verra bientôt,

$$\frac{\pi}{\sqrt{\frac{s}{mr} - \frac{2fM}{d^3}}}:$$

cette durée peut être également observée : en la désignant par θ, et ayant égard à l'équation précédente, on aura

$$\theta = \Pi \sqrt{\frac{\Omega}{2} \frac{d^2 r}{fM}}\,;$$

mais si la masse de la terre est désignée comme ci-dessus par $V\frac{\Pi}{g}$, et son rayon par R, nous aurons

$$\frac{f.V\frac{\Pi}{g}}{R^2} = g, \quad \text{d'où} \quad f = \frac{g^2R^2}{V\Pi}.$$

De plus, si a représente le volume du corps placé en D, et p le poids de l'unité de volume de ce corps, nous aurons $m = a\frac{p}{g}$; mettant en valeur dans l'équation précédente, elle deviendra

$$\theta = \Pi \sqrt{\frac{\Omega}{2} \frac{r}{g} \frac{d^2}{R^2} \frac{V\Pi}{ap}},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\Pi}{p} = \theta^2 \frac{2}{\Pi\Omega} \frac{gR^2 a}{d^2 r V}\,:$$

les expériences dont il s'agit sont très-délicates et exigent des précautions minutieuses. Celles qui ont été faites par *Cavendish* ont conduit à attribuer à la terre une densité moyenne égale à environ cinq fois et demie celle de l'eau, résultat un peu plus grand que celui qui a été mentionné.

CHAPITRE IV.

MOUVEMENT SUR UNE SURFACE OU SUR UNE COURBE DONNÉE.

—

§ Ier.

Équations du mouvement sur une surface ou une courbe donnée.

225. Supposons un mobile assujetti à se mouvoir sur une surface $L=0$, et admettons, ce qui est permis, que toutes les forces accélératrices soient réduites à une seule P, et que le mobile est doué d'une vitesse égale à ω_0. La résistance opposée par la surface devra être dirigée suivant la normale ; et si on tient compte de cette force, on pourra assimiler le mouvement du mobile à celui d'un point libre dans l'espace soumis à une force motrice qui sera la résultante de P et de la résistance R : cela posé, différentiant l'équation de la surface, il viendra

$$\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz=0,$$

et si a,b,c sont les angles de la résistance avec les axes, on aura

$$\frac{\cos.a}{\frac{dL}{dx}}=\frac{\cos.b}{\frac{dL}{dy}}=\frac{\cos.c}{\frac{dL}{dz}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}},$$

équation de laquelle on déduit les valeurs de cos. a, cos. b, cos. c, en prenant le signe $+$ ou $-$ suivant le sens dans lequel agit la résistance. Maintenant, si X,Y,Z sont les projections algébriques de P, et λ,μ,ν ses angles, si X',Y',Z' sont celles de la force motrice totale, on aura

$$X' = P\cos.\lambda + R\cos.a = X + R\cos.a$$
$$Y' = P\cos.\mu + R\cos.b = Y + R\cos.b$$
$$Z' = P\cos.\nu + R\cos.c = Z + R\cos.c,$$

et les équations du mouvement seront

$$(2)\quad m\frac{d^2x}{dt^2} = X' = X + R\cos.a,\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y' = Y + R\cos.b,$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z' = Z + R\cos.c;$$

on a donc six équations entre lesquelles on peut éliminer R,a,b,c ; on aura ainsi deux équations qui, jointes à l'équation L=0, détermineront x,y,z. Or, les trois premières donnent les valeurs de a,b,c, et des trois dernières on peut facilement éliminer R ; car on en tire

$$\frac{m\frac{d^2x}{dt^2} - X}{\cos.a} = \frac{m\frac{d^2y}{dt^2} - Y}{\cos.b} = \frac{m\frac{d^2z}{dt^2} - Z}{\cos.c}.$$

ou bien

$$\frac{m\frac{d^2x}{dt^2} - X}{\frac{dL}{dx}} = \frac{m\frac{d^2y}{dt^2} - Y}{\frac{dL}{dy}} = \frac{m\frac{d^2z}{dt^2} - Z}{\frac{dL}{dz}}:$$

cette formule équivaut à deux équations qui, jointes à L=0, suffisent pour déterminer x,y,z en fonction de t.

226. De cette formule on peut déduire une équation remarquable : multiplions respectivement haut et bas les fractions ci-dessus par dx, dy, dz, et ajoutons ; chacune d'elles sera égale à

$$\frac{m\left(\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dt^2}\right)-(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz)}{\frac{d\mathrm{L}}{dx}dx+\frac{d\mathrm{L}}{dy}dy+\frac{d\mathrm{L}}{dz}dz};$$

or, dans toutes les positions, les coordonnées du mobile doivent satisfaire à l'équation de la surface $\mathrm{L}=0$, et à son équation différentielle ; donc le dénominateur est nul, et cette fraction ne pouvant être infinie, il faut que le numérateur le soit aussi, et on a

$$m\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dt^2}=\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz.$$

On peut parvenir plus directement à cette équation en multipliant les équations du mouvement par dx, dy, dz, à cela près que le deuxième membre renferme le terme

$$\mathrm{R}(\cos.a\,dx+\cos.b\,dy+\cos.c\,dz),$$

lequel est nul, puisque la normale à la surface est perpendiculaire à la tangente à la courbe suivie par le mobile.

L'équation

$$m\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dt^2}=\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz,$$

peut remplacer l'une des équations du mouvement : or, on sait que généralement le premier membre est égal à $m\omega d\omega$. Donc

$$m\omega d\omega=\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz,$$

équation indépendante de R, et qui n'est autre chose

que l'équation des forces vives déjà trouvée pour le mouvement d'un point libre.

Si la force P qui sollicite le mobile émane d'un centre fixe, on aura

$$m\omega^2 - m\omega_0^2 = \pm 2 \int_{r_0}^{r} Pdr.$$

Si le point était soumis à l'action de la pesanteur, alors

$$X = gm,\ Y = 0,\ Z = 0,$$

d'où

$$m\omega d\omega = mgdx,$$

et

$$m\omega^2 - m\omega_0^2 = mg(x - x_0).$$

227. Si le mobile se meut sur une courbe dont les équations sont $M = 0$, $N = 0$, il faut tenir compte de la résistance de la courbe qui agit, suivant une perpendiculaire à la tangente : soit R cette résistance, a, b, c les angles avec les axes, nous pourrons toujours assimiler le mouvement à celui d'un point qui se meut par la résultante des deux forces P et R, et nous aurons, comme précédemment, les équations

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + R\cos.a,\ m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + R\cos.b,\ m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + R\cos\ c:$$

ici ces équations renferment quatre inconnues R, a, b, c, au lieu d'une seule, car rien ne nous indique quelle est la normale suivant laquelle agit la force. Mais cependant cette normale, quelle qu'elle soit, doit être perpendiculaire à la tangente ; on aura donc

$$\cos.adx + \cos.bdy + \cos.cdz = 0;\ (a)$$

d'ailleurs

$$\cos.^2a + \cos.^2b + \cos.^2c = 1;$$

ainsi, on a cinq équations entre lesquelles on peut éliminer R, a, b, c, l'équation résultante jointe aux deux équations de la courbe servira à déterminer x, y, z.

228. On peut, entre les trois premières, éliminer R comme précédemment, et on tombera encore sur l'équation

$$m\left(\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dt^2}\right)=m\omega d\omega=\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz\,;$$

ainsi, cette équation subsiste dans tous les cas possibles.

229. On peut mettre cette équation sous une autre forme : en effet, λ, μ, ν étant les angles de la force P, on a

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}}=\cos.\lambda,\ \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{P}}=\cos.\mu,\ \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{P}}=\cos.\nu\,;$$

$\alpha, 6, \gamma$ étant les angles de la vitesse en un point quelconque, on a

$$\frac{dx}{\omega dt}=\cos.\alpha,\ \frac{dy}{\omega dt}=\cos.\beta,\ \frac{dz}{\omega dt}=\cos.\gamma,$$

d'où, pour l'angle δ de la vitesse et de la force motrice,

$$\cos.\delta=\cos.\lambda\cos.\alpha+\cos.\mu\cos.\beta+\cos.\nu\cos.\gamma$$
$$=\frac{\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz}{\mathrm{P}\omega dt}=\frac{m\omega d\omega}{\mathrm{P}\omega dt}=\frac{md\omega}{\mathrm{P}dt};$$

donc, dans ce mouvement, on a

$$\mathrm{P}\cos.\delta=m\frac{d\omega}{dt}\quad \text{et}\quad (b)\ \varphi\cos.\delta=\frac{d\omega}{dt}\,:$$

or, dans le cas du mouvement d'un point libre dans l'espace, nous avons trouvé précisément cette valeur pour la projection de la force accélératrice sur la direction de la vitesse : ainsi donc, dans le cas où le mobile

se meut sur une surface ou sur une courbe, la composante tangentielle est toujours liée avec la vitesse par la même relation que dans le mouvement libre : c'est ce qu'on pouvait prévoir, en effet, en décomposant la force accélératrice en deux autres, l'une normale, l'autre tangentielle ; cette dernière sera la seule qui influera sur la vitesse, car la force normale est détruite par la résistance. Donc, en tenant compte de la résistance, le point peut être considéré comme libre, et on doit avoir la même relation (b).

Si la force motrice P est nulle, alors

$$X=0,\ Y=0,\ Z=0,$$

et on a

$$m\omega d\omega=0,\ \omega d\omega=0,\ \omega^2=\omega_0^2=\text{const.},$$

d'où il résulte qu'*un point matériel assujetti à se mouvoir sur une courbe, et qui n'est sollicité par aucune force accélératrice, conserve la même vitesse pendant toute la durée du mouvement.*

§ II.

Force centrifuge.

230. La pression qu'un point matériel exerce sur une courbe qu'il est forcé de parcourir, est égale et contraire à la résistance qu'oppose la courbe et qui fait naître la vitesse du point. Si cette résistance devenait nulle, le mobile s'échapperait suivant la tangente au dernier élément : l'action de la résistance force le point à rester sur la courbe, et lui fait parcourir l'élément qui suit immédiatement. Le point matériel est donc retenu par une force qui agit dans le plan osculateur : elle est normale à la courbe, et comme elle retient le

point sur la courbe, il en résulte que la résistance que fait naître la vitesse du point matériel est dirigée en chaque point de la courbe, de ce point vers le centre du cercle osculateur. La pression est égale et opposée à la résistance : on lui a donné le nom de *force centrifuge*, soit parce que c'est la force avec laquelle le point tend à s'éloigner du centre du cercle osculateur de la courbe, soit parce que *Huygens*, à qui on doit la mesure de la force centrifuge, l'a déduite de la considération du mouvement circulaire.

Il est facile d'avoir l'expression de la force centrifuge; car si nous remplaçons la résistance par une force normale, nous pouvons considérer le mouvement du point comme celui d'un point libre : nous savons que dans ce cas la composante normale est

$$\varphi \sin.\delta = \frac{\omega^2}{\rho},$$

ρ étant le rayon de courbure, et cette composante est précisément la force centrifuge.

Fig. 64. 231. On peut parvenir directement à la détermination de la force centrifuge : en effet, si le point n'était pas retenu par la courbe, il suivrait la tangente et arriverait en un point T au bout du temps Δt, tandis qu'étant soumis à la résistance de la courbe, il arriverait en B au bout du même temps. L'*anomalie* BT sera sensiblement la direction de la force φ', qui tend à éloigner le point matériel de la courbe, c'est-à-dire de la force centrifuge : cette anomalie étant parcourue dans le temps Δt, on a

$$\text{TB} = \frac{1}{2}\varphi'\Delta t^2:$$

Supposons maintenant qu'on prenne AC=AT, dans le triangle TCB, les angles C et B étant sensiblement droits, les côtés TC, TB étant entre eux comme les sinus des angles opposés, on aura

$$\frac{TB}{AC}=1\pm\varepsilon;$$

nous connaissons TB; de plus AT et AC étant égaux à un infiniment petit du premier ordre, il en résulte

$$\rho=\frac{\overline{AT}^2}{2TC},\ TC=\frac{\overline{AT}^2}{2\rho},$$

or,

$$AT=\omega\Delta t,$$

ainsi

$$TC=\frac{1}{2}\frac{\omega^2\overline{\Delta t}^2}{\rho}.$$

L'égalité précédente devient donc

$$\frac{\varphi'}{\frac{\omega^2}{\rho}}\times\frac{\overline{\Delta t}^2}{\overline{\Delta t}^2}=1\pm\varepsilon:$$

à la limite ε est nul et on a rigoureusement

$$\varphi'=\frac{\omega^2}{\rho}:$$

telle est l'expression de la force centrifuge et la force motrice centrifuge est égale à $\frac{m\omega^2}{\rho}$; c'est également l'expression absolue de la résistance que la vitesse du point matériel fait opposer à la courbe.

Si le point matériel retenu sur la courbe donnée est non-seulement mu d'une vitesse initiale, mais est encore sollicité par plusieurs forces accélératrices dont

la résultante est P, la force centrifuge reste la même que quand P=0 ; la pression exercée en chaque point de la courbe sera la résultante de la force centrifuge, et de la composante normale de P.

232. Si la courbe décrite par le point matériel devenait un cercle, la force centrifuge serait constamment la même : elle est dans ce cas égale et directement opposée à la force accélératrice $\frac{K}{\rho^2}$ qui émane du centre : on a donc

$$\frac{\omega^2}{\rho}=\frac{k}{\rho^2}.$$

Désignons par T le temps d'une révolution entière, ωT représentera la circonférence, par conséquent

$$\omega T=2\pi\rho,$$

d'où

$$\omega^2\rho=k=\frac{4\pi^2\rho^3}{T^2}:$$

on voit que cette valeur s'accorde avec celle de

$$k=\frac{4\pi^2a^3}{T^2},$$

trouvée pour un orbite elliptique. Dans ce cas, comme nous avons pour la force centrifuge

$$f=\frac{\omega^2}{\rho},$$

et que

$$\omega^2=\frac{4\pi^2\rho^2}{T^2},$$

il vient

$$f=\frac{4\pi^2\rho^2}{T^2},$$

ainsi, *la force centrifuge dans le cercle est directement proportionnelle au rayon, tandis que, dans le cas général, elle est inversement proportionnelle au rayon de courbure.*

233. Lorsqu'un corps solide tourne autour d'un axe fixe, chaque point décrit un cercle perpendiculaire à cet axe et cela dans le même temps, et les forces centrifuges des différents points du corps sont entre elles comme les perpendiculaires abaissées de ces points sur l'axe fixe. Ainsi la force centrifuge de chaque corps placé à la surface de la terre et qui tourne avec elle autour de l'axe des *pôles*, est proportionnelle au rayon du *parallèle* qu'il décrit, et est dirigée suivant son rayon.

D'après cela, excepté au pôle, où la force centrifuge est nulle, la *pesanteur* varie et diminue jusqu'à l'équateur où la force centrifuge et la pesanteur sont dirigées en sens contraires l'une de l'autre, et par conséquent la pesanteur est égale à l'excès de l'attraction de la terre sur la force centrifuge. Ainsi, en appelant g cette pesanteur, G l'attraction terrestre, R le rayon de l'équateur, et T le temps de la rotation de la terre, on a

$$g = G - \frac{4\pi^2 R}{T^2};$$

le deuxième terme étant très-petit par rapport au premier, on a sensiblement

$$g = G\left(1 - \frac{4\pi^2 R}{gT^2}\right).$$

En prenant le rayon du méridien pour celui de l'équateur dont il diffère peu, on aura $2\pi R = 40000000^m$; en prenant la seconde pour unité, et négligeant la petite

variation de la pesanteur, on a ainsi $g = 9^m, 80896$; d'ailleurs T=86164, d'où l'on conclut

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{1}{289} = \frac{1}{(17)^2};$$

ainsi, à l'équateur la pesanteur est diminuée de $\frac{1}{289}$, et on voit qu'il suffirait que la rotation eût lieu en un dix-septième de jour pour que la force centrifuge à l'équateur détruisît la gravité, et que les corps abandonnés à eux-mêmes y demeurassent en équilibre.

La diminution de la pesanteur du pôle à l'équateur augmente, soit parce que la force centrifuge augmente, soit parce que l'angle qu'elle fait avec la verticale devient plus grand. Appelons r le rayon d'un parallèle et l la latitude correspondante, on aura $r = \mathrm{R}\cos. l$; en supposant le globe sphérique, l'angle l sera celui que le prolongement de r ou la direction de la force centrifuge fait avec la verticale; la composante verticale de la force centrifuge sera donc

$$\frac{4\pi^2 r \cos. l}{T^2},$$

ce qui donne

$$\frac{4\pi^2 \mathrm{R} \overline{\cos.}^2 l}{T^2},$$

pour la diminution de la pesanteur due à la rotation de la terre, et d'après ce qui précède, cette quantité aura pour valeur $\frac{\cos.^2 l}{289}$. Ce serait là la diminution totale si la terre était une sphère homogène : elle serait proportionnelle au carré du cosinus de la latitude, et

la diminution du pôle, où l'on a $l=9°$ à l'équateur, ou $l=0$, s'élèverait à $\frac{1}{289}$; mais la terre est un sphéroïde aplati aux pôles, l'attraction qu'elle exerce sur les corps placés à la surface diminue à cause de cela en allant du pôle à l'équateur : cette diminution est aussi en chaque point de la surface proportionnelle au carré du cosinus de la latitude ; elle s'ajoute à celle qui est produite par la force centrifuge, et alors le coefficient $\frac{1}{289}$ devient $\frac{1}{200}$, et c'est cette fraction qui exprime l'accroissement total d'un poids transporté de l'équateur au pôle.

§ III.

Mouvement d'un corps pesant sur une courbe, isochronisme des oscillations.

234. Reprenons l'équation des forces vives établie dans le paragraphe 1er

$$m\omega d\omega = Xdx + Ydy + Zdz\,;$$

si nous supposons l'axe des x vertical, nous aurons dans le cas qui nous occupe

$$X = mg,\ Y = 0,\ Z = 0,$$

ainsi l'équation du mouvement devient

$$m\omega d\omega = mgdx,$$

d'où en intégrant

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2g(x - x_0)\,,$$

on voit d'abord que la vitesse augmente à mesure que le mobile descend.

Supposons plus simplement que $\omega_0 = 0$, et posons $x - x_0 = h$, alors

$$\omega = \sqrt{2gh},$$

or, c'est précisément la vitesse acquise par un corps pesant tombant d'une hauteur h : cette vitesse ne dépend que de l'abscisse $h=x-x_0$; par conséquent *la vitesse acquise par un corps pesant en parcourant une certaine hauteur, est la même, soit que le corps tombe suivant la verticale, soit qu'il suive une droite ou une courbe quelconque.*

Fig. 65. 235. Considérons un point matériel pesant en mouvement sur une droite inclinée à l'horizon d'un angle θ ; en appelant s l'espace parcouru dans un temps t, on a

$$h=x-x_0=s\sin.\theta, \omega^2=2g\sin.\theta,$$

et le mouvement est le même que si le corps était sollicité suivant la droite par une force accélératrice $g'=g\sin.\ \theta$; d'après cela

$$s=\frac{1}{2}g't^2=\frac{1}{2}g\sin.\theta t^2,$$

d'où

$$t^2=\frac{2}{g}\cdot\frac{s}{\sin.\theta},$$

ce qui montre que t sera le même quel que soit θ, pourvu que $\frac{S}{\sin.\theta}$ soit constant ; or $\frac{S}{\sin.\theta}=AB=h$, si $S=Am$ est une corde du cercle dont AB est le diamètre : donc un *corps pesant partant d'un point donné parcourt dans le même temps les cordes et le diamètre d'un cercle, passant par le point de départ.*

Fig. 66 236. En supposant la vitesse initiale nulle, l'équation du mouvement est $\omega^2=2g\ (x-x_0)$. Si le mobile part d'un point A de la courbe pour lequel $x=a$, cette valeur devient $\omega^2=2g\ (x-a$, d'où

$$\omega=\left\{2g(x-a)\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{ds}{dt},$$

et

$$dt = \frac{1}{(2g)^{\frac{1}{2}}} \frac{ds}{dx} \frac{dx}{\sqrt{x-a}},$$

ou bien

$$T = \frac{1}{(2g)^{\frac{1}{2}}} \int_a^b \frac{ds}{dx} \frac{dx}{\sqrt{x-a}},$$

en appelant T le temps qu'a mis le mobile pour parvenir au point B, où $x=b$: au point B la vitesse est

$$\omega = \{2g(b-a)\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2gh} \ (h=b-a):$$

supposons maintenant que le mobile doué de cette vitesse comme vitesse initiale remonte de B vers A, on aura

$$\omega_0 = \sqrt{2gh}, \quad \omega_0^2 = 2gh = 2g(b-a),$$

et par suite

$$\omega^2 - 2g(b-a) = 2g(x-b),$$

ou

$$\omega^2 + 2ga = 2gx,$$

ou bien

$$\omega = \{2g(x-a)\}^{\frac{1}{2}},$$

la valeur de t correspondante sera donc la même que précédemment, d'où découle cette conséquence remarquable que *le temps qu'un corps pesant met à parcourir un certain espace en vertu de la pesanteur, est le même qu'il emploie à le parcourir en sens inverse en vertu de la vitesse acquise pendant le premier mouvement.*

Dans ce qui va suivre comme dans ce qui précède, nous faisons abstraction du frottement et de la résistance du milieu.

Fig. 67. **237.** Considérons une courbe qui se continue au delà du point B, supposé le plus bas : si le corps part du point A pour lequel l'abscisse comptée verticalement est $x=a$, on aura pour la vitesse du mobile $\omega^2=2g(x-a)$; parvenu au point B où $x=b$, cette vitesse sera

$$\omega^2=2g(b-a),\quad \omega=\sqrt{2g(b-a)}=\sqrt{2gh}.$$

Si $h=b-a$: à partir de ce point et en vertu de cette vitesse acquise, le mobile s'élèvera sur la deuxième branche de la courbe jusqu'en un point A′ situé dans le plan horizontal passant par le point A; cela résulte de ce qui précède, mais du reste cela est évident, car la vitesse ne dépend que de l'abscisse du point où se trouve le mobile à l'instant dont il s'agit; elle prendra en un point quelconque de la courbe ascendante la même valeur qu'elle avait sur le point de la courbe descendante situé sur la même horizontale, jusqu'au point A′, où cette vitesse s'annule puisque $x=a$: alors le mobile redescendra en B pour remonter A, et ainsi de suite, en sorte qu'il exécutera une infinité d'*oscillations* dans le même temps, c'est-à-dire que ses oscillations seront *isochrones* On appelle oscillation le chemin parcouru par le corps pour aller de A en A′ et de A′ en A : en sorte que si l'on désigne par T le temps employé pour aller de A en B, *et* T′ le temps nécessaire pour monter de B en A′, $2(T+T')$ est le temps d'une oscillation. Lorsque les deux branches de la courbe sont symétriques par rapport au plan vertical, passant par le point B, alors $T=T'$, et $4T$ est le temps d'une oscillation.

Fig. 68. Tout se passe également, soit que la courbe soit fermée ou non ; mais dans le premier cas, si le mobile

part du point A avec une vitesse ω_0, en un point quelconque la vitesse sera donnée par l'équation

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2g(x-a),$$

et au point B par

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2g(b-a) = \omega_0^2 + 2gh\,;$$

en vertu de la vitesse $\sqrt{2gh}$, il s'élèvera en A', où on aura $\omega = \omega_0$, et en vertu de cette dernière vitesse, il continuera à s'élever jusqu'à un certain point D'; s'il atteint ce point avant le sommet de la courbe, il s'arrêtera pour redescendre en B, remonter jusqu'en D, ainsi de suite, en sorte *qu'il exécutera encore des oscillations isochrones, et seulement la durée de la première sera plus courte que celle des autres:* si parvenu en D', sa vitesse ω_0 lui fait dépasser le sommet, le mobile continuera son mouvement au delà de ce sommet, il redescendra par la branche opposée, et au lieu d'osciller, il *parcourra un nombre indéfini de fois et dans des intervalles de temps égaux le contour entier de la courbe donnée.*

La même chose a lieu pour une courbe à double courbure, pourvu qu'elle soit continue.

§ IV.

Mouvement d'un point matériel pesant, dans le cercle, pendule simple.

238. On appelle *pendule* en général un corps solide pesant qui oscille autour d'un axe fixe horizontal : mais pour rendre les observations plus faciles, on a imaginé un pendule idéal qu'on nomme *pendule simple*, c'est-à-dire un point matériel pesant, suspendu à un point

fixe au moyen d'un fil inextensible, inflexible et même sans masse. Nous verrons plus tard comment soit dans le vide, soit dans un milieu résistant, on peut toujours déterminer un pendule simple dont les oscillations coïncident, et pour leurs durées, et pour leurs amplitudes, avec celles d'un pendule quelconque.

Fig. 69. Soit C le point de suspension, CD la verticale qui coïncide avec l'axe des x, CA la position initiale du pendule : supposons que dans cette position on imprime au point matériel, attaché à l'extrémité du fil, une vitesse dirigée dans le plan vertical CAD, et perpendiculaire à sa longueur, le pendule pendant son mouvement ne sortira pas de ce plan, et le point matériel décrira un cercle d'un rayon CA : le mouvement du pendule revient donc au mouvement dans un cercle, et le pendule simple s'appelle aussi *pendule circulaire*. Désignons par ρ le rayon de ce cercle, par θ_0 l'angle initial ACD, et par θ l'angle variable correspondant à l'arc décrit AB, et appelant x_0 et x les abscisses des deux points A et B, nous aurons $\omega^2=2g(x-x_0)$, ou

$$\omega=\frac{ds}{dt}=(2g)^{\frac{1}{2}}(x-x_0)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$dt=\frac{1}{(2g)^{\frac{1}{2}}}\frac{ds}{(x-x_0)^{\frac{1}{2}}}:$$

pour intégrer cette équation, nous allons introduire la variable θ au lieu de la variable x : or, on a évidemment

$$x=\rho\cos.\theta,\quad x_0=\rho\cos.\theta_0,$$

et

$$(x-x_0)^{\frac{1}{2}}=\rho^{\frac{1}{2}}(\cos.\theta-\cos.\theta_0)^{\frac{1}{2}}.$$

D'ailleurs $s=\rho(\theta_0-\theta)$, ce qui donne $ds=-\rho d\theta$; substituant dans la valeur de dt, il vient

$$dt=-\left(\frac{\rho}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d\theta}{(\cos.\theta-\cos.\theta_0)^{\frac{1}{2}}},$$

et l'intégration donne

$$t=-\left(\frac{\rho}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{(\cos.\theta-\cos.\theta_0)^{\frac{1}{2}}};$$

ou bien, en désignant par T le temps employé à décrire l'arc AD, on peut écrire

$$\mathrm{T}=-\left(\frac{\rho}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{(\cos.\theta-\cos.\theta_0)^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{\rho}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{(\cos.\theta-\cos.\theta_0)^{\frac{1}{2}}},$$

voilà l'intégration qu'il s'agit d'effectuer. Nous allons considérer deux cas :

239 1° Si l'on suppose θ_0 très-petit, ce qui arrive dans la pratique, alors θ sera lui-même très-petit et le pendule oscillera infiniment peu de part et d'autre de la verticale : alors l'arc décrit pourra être considéré comme se confondant sensiblement avec une courbe dont ce cercle serait le cercle osculateur; ainsi on pourra admettre que le point matériel se meut sur un arc de cycloïde, dont le point D serait le point le plus bas; or, nous verrons dans le paragraphe suivant que le temps employé à décrire un pareil arc est

$$\mathrm{T}=\left(\frac{b}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\pi,$$

b étant le diamètre du cercle générateur : d'après cela

$$\rho=2b \quad \text{ou} \quad b=\frac{\rho}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}=\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\pi,$$

est la valeur cherchée. On peut vérifier ce résultat : en effet, généralement

$$\cos.2x = 1 - 2\sin.^2 x,$$

ainsi

$$\cos.\theta = 1 - 2\sin.^2 \frac{\theta}{2}, \quad \cos.\theta_0 = 1 - 2\sin.^2 \frac{\theta_0}{2},$$

et par suite

$$\cos.\theta - \cos.\theta_0 = 2\left(\sin.^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin.^2 \frac{\theta}{2}\right),$$

et la valeur de T devient

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\left(\sin.^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin.^2 \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

mais les angles θ, θ_0 étant très-petits, on peut les substituer aux sinus, ce qui donne

$$T = \left(\frac{\rho}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}},$$

et puisque

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \text{arc. sin.} \frac{\theta}{\theta_0} + C,$$

il s'ensuit que

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \frac{\pi}{2};$$

donc

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \pi,$$

valeur identique avec la précédente.

240. 2° Quand l'angle θ_0 n'est pas très-petit, la valeur précédente de T n'est qu'une valeur approchée, et

quoiqu'on ait soin dans les différents usages du pendule de faire en sorte que l'amplitude des oscillations soit très-petite, il est bon néanmoins de connaître la série convergente par laquelle on peut exprimer la durée d'une oscillation quelle que soit son amplitude.

Reprenons l'équation

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\left(\sin.^2\frac{\theta_0}{2}-\sin.^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

et posons

$$(1)\ \sin.\frac{\theta}{2}=\sin.\frac{\theta_0}{2}\sin.\lambda,$$

ce qui est toujours possible, puisque θ est plus petit que θ_0; on déduit de cette dernière égalité

$$\sin.^2\frac{\theta}{2}=\sin.^2\frac{\theta_0}{2}\sin.^2\lambda,$$

d'où

$$\sin.^2\frac{\theta_0}{2}-\sin.^2\frac{\theta}{2}=\sin.^2\frac{\theta_0}{2}(1-\sin.^2\lambda)=\sin.^2\frac{\theta_0}{2}\cos.^2\lambda,$$

et

$$\left(\sin.^2\frac{\theta_0}{2}-\sin.^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sin.\frac{\theta_0}{2}\cos.\lambda:$$

d'ailleurs la différentiation de (1) donne

$$\cos.\frac{\theta}{2}\frac{d\theta}{2}=\sin.\frac{\theta_0}{2}\cos.\lambda d\lambda,$$

ou

$$d\theta=\frac{2\sin.\frac{\theta_0}{2}\cos.\lambda d\lambda}{\cos.\frac{\theta}{2}},$$

substituant dans la valeur de T, et observant que les limites correspondantes de λ sont o et $\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$T=\left(\frac{\rho}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{o}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\lambda}{\cos.\frac{\theta}{2}}=\left(\frac{\rho}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\int^{\frac{\pi}{2}}\left\{1-\sin.^2\frac{\theta_o}{2}\sin.^2\lambda\right\}^{\frac{1}{2}}d\lambda:$$

voilà la nouvelle expression qu'il s'agit d'intégrer ; or, nous avons généralement

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1\ 3.5}{2.4.6}x^6+\ldots\frac{1.3\ldots2n-1}{2.4\ldots2n}x^{2n}+.,$$

on a donc, en développant la quantité sous le signe $\int$ d'après cette loi,

$$T=\left(\frac{\rho}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{o}^{\frac{\pi}{2}}\left\{1+\frac{1}{2}\sin.^2\frac{\theta_o}{2}\sin^2.\lambda+\frac{1.3}{2.4}\sin.^4\frac{\theta_o}{2}\sin.^4\lambda+\right.$$
$$\left.\frac{1.3.5\ldots.2n-1}{2.4.6\ldots.2n}\sin 2n\frac{\theta_o}{2}\sin.^{2n}\lambda+\ldots.\right\}d\lambda\ :$$

on voit maintenant que tout se réduit à intégrer chacun des termes entre parenthèses, ou à intégrer le terme général

$$\frac{1.3\ldots..2n-1}{2.4\ldots..2n}\sin.^{2n}\frac{\theta_o}{2}\int_{o}^{\frac{\pi}{2}}\sin.^{2n},d\lambda.$$

Pour cela faire, observons que

$$2\sin.\lambda\sqrt{-1}=e^{\lambda\sqrt{-1}}-e^{-\lambda\sqrt{-1}},$$

et par suite

$$(-1)^n2^{2n}\sin.^{2n}\lambda=\left(e^{\lambda\sqrt{-1}}-e^{-\lambda\sqrt{-1}}\right)^{2n}:$$

ainsi le terme général devient

$$(2)\ \frac{1.3.....2n-1}{2.4.....2n}\ \frac{\sin.^{2n}\frac{\theta_0}{2}}{(-1)^n 2^{2n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{\lambda\sqrt{-1}} - e^{-\lambda\sqrt{-1}}\right)^{2n} d\lambda\,;$$

d'un autre côté, d'après la formule du binome de Newton

$$\left(e^{\lambda\sqrt{-1}} - e^{-\lambda\sqrt{-1}}\right)^{2n} = e^{2n\lambda\sqrt{-1}} - 2ne^{-\lambda\sqrt{-1}}$$
$$e^{(2n-1)\lambda\sqrt{-1}} + \frac{2n(2n-1)}{2} e^{-2\lambda\sqrt{-1}} e^{-(2n-2)\lambda\sqrt{-1}} + \text{etc.}$$
$$+ e^{-2n\lambda\sqrt{-1}} - 2ne^{\lambda\sqrt{-1}} e^{-(2n+1)\lambda\sqrt{-1}}$$
$$+ \frac{2n(2n+1)}{2} e^{2\lambda\sqrt{-1}} e^{-(2n+2)\lambda\sqrt{-1}} + \text{etc.},$$

et le terme du milieu est

$$(-1)^n \frac{2n(2n-1)(\ldots\ldots)(n+1)}{1.2.3.....n} e^{n\lambda\sqrt{-1}} e^{-n\lambda\sqrt{-1}},$$

ou

$$\frac{2n(2n-1)(\ldots\ldots)(n+1)}{1.2.3.........n};$$

assemblant les termes à égale distance des extrêmes, et ayant égard à la relation

$$2\cos.z = e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}},$$

on trouve

$$\left(e^{\lambda\sqrt{-1}} - e^{-\sqrt{-1}}\right)^{2n} = 2\cos.(2n\lambda) - 2.2n\cos.(2n-2)\lambda + \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{2n(2n-1)\ \ldots\ldots(n+1)}{1.2.3.......n};$$

intégrant les deux membres de cette égalité entre les limites 0, et $\frac{\pi}{2}$ de λ, il vient simplement

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{\lambda\sqrt{-1}}-e^{-\lambda\sqrt{-1}}\right)^{2n}d\lambda=(-1)^n\frac{2n(2n-1)(\ldots)(n+1)}{1.2.3.\ldots\ldots.n}\frac{\pi}{2}$$
$$=(-1)^n.\frac{1.2.3.\ldots\ldots.2n}{(1.2\ldots n)(1.e\ldots n)}\frac{\pi}{2};$$

substituant dans (2), le terme général devient

$$\frac{\sin.^{2n}\frac{\theta_0}{2}}{(-1)^n.2^{2n}}\times\frac{1.3.\ldots\ldots 2n-1}{2.4.\ldots\ldots.2n}\times(-1)^n.\frac{1.2.3.\ldots.2n-1.2n}{(1.2.3..n)(1.2.3\ldots n)}\frac{\pi}{2}$$
$$=\sin.^{2n}\frac{\theta_0}{2}\times 1.3\ldots.2n-1\times\frac{1.3.\ldots\ldots\ldots 2n-1}{(2n)^2(1\ldots.2n)(1.2\ldots n)}\frac{\pi}{2}$$
$$=1.2.3.\ldots.2n-1\times\frac{1.2.3.\ldots.2n-1}{(2.4\ldots..2n)(2.4\ldots..2n)}\sin.^{2n}\frac{\theta_0}{2}\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1.3\ldots\ldots 2n-1}{2.4\ldots\ldots 2n}\sin.^n\frac{\theta_0}{2}\right)^2,$$

en sorte que

$$T=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\rho}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\sin.\frac{\theta_0}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\sin.^2\frac{\theta_0}{2}\right)^2+\ldots..\right\}.$$

Cette formule est facile à retenir, car on a

$$\left(1-\sin.\frac{\theta_0}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\sin.\frac{\theta_0}{2}+\frac{1.3}{2.4}\sin.^2\frac{\theta_0}{2}+\ldots\ldots..$$

et on voit que les termes qui entrent dans la valeur de T ne sont autre chose que ceux de cette série élevés au carré, d'où l'on conclut que l'*expression de T est une série convergente.*

241. Nous allons actuellement considérer le mouvement du pendule simple dans un milieu résistant.

Avant de résoudre cette question, nous allons d'abord faire voir que dans le mouvement d'un mobile sur une courbe, la considération du frottement et de la rési-

stance du milieu produit une diminution de vitesse. En effet, représentons la résultante des forces provenant de la résistance du milieu et du frottement par $f(\omega)$, avec la seule condition que cette fonction croît ou décroît indéfiniment avec la vitesse ω. Nous avons vu que la composante d'une force motrice quelconque suivant la tangente, c'est-à-dire suivant la vitesse, est $m\frac{d\omega}{dt}$: or, la composante, provenant de la pesanteur, est mg cos. $\alpha = mg\frac{dx}{\omega dt}$, puisque ω cos. $\alpha = \frac{dx}{dt}$: de plus la résistance agit suivant la vitesse et en sens contraire, aussi on a

$$m\frac{d\omega}{dt} = mg\,\frac{dx}{\omega dt} - f(\omega),$$

d'où, en intégrant

$$m\omega^2 - m\omega_0^2 = mg(x - x_0) - \int_0^t \omega f(\omega) dt:$$

il est évident que la vitesse a diminué, car l'intégrale est nécessairement positive, et dans le vide on a simplement $m\omega^2 - m\omega_0^2 = mg(x - x_0)$; on voit, en outre, que la vitesse doit finir par s'annuler, car autrement, le temps augmentant, le deuxième membre deviendrait négatif, et par suite, il en serait de même de la vitesse.

Cela posé, passons au pendule en conservant les notations précédentes.

Soit C le centre de suspension, CA la position initiale, et CB une position intermédiaire. Dans ce cas, nous avons cos. α = sin. θ, ainsi l'équation ci-dessus devient Fig. 70.

$$m\frac{d\omega}{dt} = mg \sin.\theta - f(\omega);$$

nous savons de plus que

$$ds = -\rho d\theta, \ ds = \omega dt,$$

ainsi

$$\rho \frac{d\omega}{dt} + \omega = 0 :$$

voilà les deux équations qu'il s'agit d'intégrer pour avoir les valeurs de ω et de θ : nous le ferons seulement dans le cas où θ_0 est très-petit, le seul cas qu'il importe de considérer, θ étant lui-même très-petit, on peut remplacer le sinus par l'arc, et les équations à intégrer prennent alors la forme

$$\frac{d\omega}{dt} - g\theta + \frac{1}{m} f(\omega) = 0 \, , \ \rho \frac{d\omega}{dt} + \omega = 0 \, ,$$

rentrons un moment dans le cas particulier où l'on peut négliger $f(\omega)$; les deux équations

$$\frac{d\omega}{dt} - g\theta = 0, \ \rho \frac{d\omega}{dt} + \omega = 0.$$

sont faciles à intégrer : pour cela multiplions la deuxième par une indéterminée λ, et retranchons-la de la première, il vient

$$\frac{d(\omega + \lambda\theta)}{dt} - g\theta + \frac{\lambda}{\rho} \omega = 0,$$

ou

$$\frac{d(\omega + \lambda\theta)}{dt} + \frac{\lambda}{\rho} \left(\omega - \frac{g\rho\theta}{\lambda} \right) = 0 :$$

nous pouvons profiter de l'indétermination de λ de manière qu'on ait

$$\omega - \frac{g\rho\theta}{\lambda} = \omega + \lambda\theta \, ,$$

$$\text{ou } \lambda = -\frac{g\rho}{\lambda}, \ \lambda^2 = -g\rho \, ,$$

ou bien

$$\lambda = \pm (g\rho)^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1},$$

et l'équation précédente se change dans la suivante

$$d(\omega+\lambda\theta) + \frac{\lambda}{\rho}\,(\omega+\lambda\theta)dt = 0,$$

qui n'est autre chose que

$$\frac{d(\omega+\lambda\theta)}{\omega+\lambda\theta} = -\frac{\lambda}{\rho}\,dt,$$

d'où, en intégrant

$$l(\omega+\lambda\theta) - l(\lambda\theta_0) = -\frac{\lambda}{\rho}\,t,$$

ou

$$\frac{l(\omega+\lambda\theta)}{\lambda\theta_0} = -\frac{\lambda}{\rho}\,t,$$

et en passant aux nombres

$$\omega+\lambda\theta = \lambda\theta_0 e^{-\frac{\lambda}{\rho}t}:$$

remplaçant λ par sa valeur, nous aurons

$$\omega+(g\rho)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\,\theta = (g\rho)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\;\theta_0 \times e^{-\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} t\sqrt{-1}}$$
$$= (g\rho)^{\frac{1}{2}}\theta_0\sqrt{-1}\left(\cos.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} t - \sqrt{-1}\sin.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}\right):$$

égalant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient

$$\omega = (g\rho)^{\frac{1}{2}}\theta_0 \sin.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} t:$$

$$\theta = \theta_0 \cos.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} t;$$

or, nous avons trouvé pour le temps d'une demi-oscilla-

tion dans le vide $\pi\left(\frac{\rho}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$, et on voit que cette valeur doit annuler la valeur précédente de ω. Maintenant pour avoir une approximation dans le cas général, nous allons substituer la valeur de ω que nous venons de trouver dans les équations primitives : en désignant celle-ci par Ω, ces deux équations seront

$$\frac{d\omega}{dt}-g\theta+\frac{1}{m}f(\Omega)=0,\quad \rho\frac{d\theta}{dt}+\omega=0\,;$$

en opérant sur ces deux équations, comme nous l'avons fait sur les deux autres, nous pourrons remplacer leur système par une seule équation, savoir :

$$\frac{d(\omega+\lambda\theta)}{dt}+\frac{\lambda}{\rho}(\omega+\lambda\theta)=-\frac{1}{m}f(\Omega)\,:$$

or, l'on sait que le facteur propre à rendre intégrable une équation de la forme

$$dy+\mathrm{P}y\,dx=q\,dx\,,$$

est

$$\nu=e^{\int \mathrm{P}dx}$$

et qu'alors le premier membre est la différentielle exacte en (x,y) : ainsi dans le cas qui nous occupe ν étant $e^{\frac{\lambda t}{\rho}}$, on a

$$d\left\{(\omega+\lambda\theta)\,e^{\frac{\lambda}{\rho}t}\right\}=-\frac{1}{m}e^{\frac{\lambda}{\rho}t}f(\Omega)\,dt\,,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$(\omega+\lambda\theta)\,e^{\frac{\lambda}{\rho}}-\lambda\theta_0=-\frac{1}{m}\int_0^t e^{\frac{\lambda}{\rho}t}f(\Omega)dt\,,$$

ou bien

$$\omega+\lambda\theta=\lambda\theta_0\, e^{-\frac{\lambda}{\rho}t}-\frac{1}{m}\, e^{-\frac{\lambda}{\rho}t}\int_0^t e^{\frac{\lambda}{\rho}t} f(\Omega)\, dt\,,$$

et en remplaçant λ par sa valeur

$$\omega+(g\rho)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\,\theta=(g\rho)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\,\theta_0\left\{\cos.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}t-\sqrt{-1}\right.$$

$$\left.\sin.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}t\right\}-\frac{1}{m}\left\{\cos.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}t-\sqrt{-1}\sin.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}t\right\}$$

$$\int_0^t\left\{\cos.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}t-\sin.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}t\,\sqrt{-1}\right\}f(\Omega)\,dt:$$

égalant les parties réelles et imaginaires des deux membres, on obtient

$$\omega=(g\rho)^{\frac{1}{2}}\theta_0\sin.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}t-\frac{1}{m}\cos.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}t\int_0^t\cos.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}t f(\Omega)\,dt,$$

$$-\frac{1}{m}\sin.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}t\int_0^t\sin.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}t f(\Omega)\,dt,$$

et

$$\theta=\theta_0\cos.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}t+\frac{1}{m}\sin.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}t\int_0^t\cos.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}t f(\Omega)\,dt$$

$$-\frac{1}{m}\cos.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}t\int_0^t\sin.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}t f(\Omega)\,dt:$$

Voyons maintenant les conséquences qu'on peut tirer de ces résultats.

242. D'abord il est facile de voir que *le temps d'une demi-oscillation est le même que dans le vide :* en effet, ce temps est celui compris entre deux instants où la vitesse est nulle, de plus nous avons trouvé dans le vide

$$\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} t = \pi ,$$

il suffit donc pour prouver la vérité de notre assertion, de faire voir que cette valeur de *t* annulle notre valeur de ω ; et d'abord cette substitution réduit la valeur de ω à

$$\omega = + \frac{1}{m} \int_0^\pi \cos. \left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} t f(\Omega)\, dt :$$

posons

$$\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} t = \alpha ,$$

alors

$$\omega = + \frac{1}{m} \int_0^\pi \cos.\alpha f(k \sin.\alpha) d\alpha ,$$

ou

$$\omega = \frac{1}{m} \int_0^\pi f(k \sin.\alpha)\, d \sin.\alpha ;$$

équation qu'on peut décomposer en deux autres, de la manière suivante :

$$\omega = + \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(k \sin.\alpha)\, d \sin.\alpha + \frac{1}{m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(k \sin.\alpha)\, d \sin.\alpha$$

$$= + \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(k \sin.\alpha)\, d \sin.\alpha - \frac{1}{m} \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(k \sin.\alpha)\, d \sin.\alpha ;$$

on voit d'après cela, que ω est nul, car les sinus étant égaux et de même signe de *o* jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, et depuis π jus-

qu'à $\frac{\pi}{2}$, les deux termes du deuxième membre se détruisent.

243. Une autre conséquence non moins importante et qui paraît contradictoire avec la précédente, c'est que l'*amplitude des oscillations va en diminuant ;* pour le démontrer il suffit de faire voir que la valeur de θ, après une demi-oscillation, ou bien que la valeur de θ correspondante à la valeur de t donnée par l'équation

$$\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} t = \pi,$$

est plus petite que θ_0 ; or, si dans la valeur de θ on substitue cette valeur de t, le premier terme se réduit à θ_0, le deuxième s'évanouit, et le troisième devient

$$\frac{1}{m}\int_0^t \sin.\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} t f(\Omega) dt ;$$

il faut prouver que ce terme n'est pas nul : posons comme précédemment

$$\left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} t = \alpha$$

ce terme devient

$$\frac{1}{m}\int_0^{\pi} \sin.\alpha f(k\sin.\alpha) d\alpha = -\int_0^{\pi} f(k\sin.\alpha) d\cos.\alpha$$

$$= -\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(k\sin.\alpha)\, d\cos.\alpha + \frac{1}{m}\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(k\sin.\alpha) d\cos.\alpha ;$$

or, entre o et $\frac{\pi}{2}$ et entre $\frac{\pi}{2}$ et π, les sinus ont des valeurs égales et de même signe, tandis que celles des

cosinus sont égales et de signes contraires, ainsi ces deux termes s'ajoutent : ce qu'il fallait établir.

Donc, *quelle que soit l'amplitude des oscillations, le temps d'une demi-oscillation reste constamment le même*. Résultat remarquable.

§ V.

Mouvement d'un corps pesant dans la cycloïde ; pendule cycloïdal.

Fig. 71. **244.** Soit la cycloïde CBD, dont B est le point le plus bas, AEF le cercle générateur d'un diamètre b, et BGC′ l'arc de la développante correspondant à l'arc CB de la développée : soit de plus A le point de départ du mobile : comptons les y sur la base supposée horizontale de la cycloïde, et les y sur une perpendiculaire à cette ligne : menons au point A la normale AE et la tangente AF.

Nous avons

$$CA=s,\ \text{arc}.CB=CC'=2b,$$

d'où

$$AB=CB-CA=2b-s\ ;$$

d'un autre côté

$$AB=AG=2AF,\ AF^2=EF\times FH=b(b-x),$$

d'où

$$AB=2\sqrt{b(b-x)}\ :$$

on a donc pour l'équation de la cycloïde

$$2b-s=2b^{\frac{1}{2}}(b-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous avons trouvé généralement

$$T=\frac{1}{(2g)^{\frac{1}{2}}}\int_a^b \frac{ds}{dx}\frac{dx}{\sqrt{x-a}}\ :$$

or, en différentiant l'équation de la cycloïde, il vient

$$ds = b^{\frac{1}{2}}(b-x)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

ou

$$\frac{ds}{dx} = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{(b-x)^{\frac{1}{2}}},$$

et par suite de la valeur générale de T devient

$$T = \frac{1}{(2g)^{\frac{1}{2}}} b^{\frac{1}{2}} \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\frac{1}{2}}(b-x)^{\frac{1}{2}}},$$

en supposant qu'il s'agit du temps mis à parcourir l'arc AB aux extrémités duquel correspondent les abscisses $x=a$, $x=b$. Pour résoudre l'intégrale qui complique cette valeur, posons (1)

$$x-a=(b-a)\sin.^2\lambda,$$

alors

$$b-x=b-a-(x-a)=(b-a)(1-\sin.^2\lambda)=(b-a)\cos.^2\lambda,$$

d'où

$$(x-a)^{\frac{1}{2}}(b-x)^{\frac{1}{2}}=(b-a)\sin.\lambda\cos.\lambda\,;$$

d'ailleurs, de (1) on tire

$$dx=2(b-a)\sin.\lambda\cos.\lambda\, d\lambda,$$

par conséquent, en observant que les limites de λ correspondantes aux limites a et b de x sont o et $\frac{\pi}{2}$,

$$T = \frac{1}{(2g)^{\frac{1}{2}}} b^{\frac{1}{2}} \int_o^{\frac{\pi}{2}} 2d\lambda = \left(\frac{b}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\pi:$$

on voit, d'après cette valeur, que *le temps de la chute d'un mobile par un arc de cycloïde est indépendant de la hauteur dont le corps est tombé*, de manière que

deux corps qui se meuvent sur une même cycloïde, et qui partent de deux points différents, parviennent dans le même temps au point le plus bas. Pour cette raison on dit que la cycloïde est *tautochrone.*

Fig. 72. 245. On peut facilement démontrer la réciproque, c'est-à-dire que la cycloïde est la seule courbe tautochrone.

Pour cela cherchons quelles courbes jouissent de cette propriété. En supposant que le mobile part du point d'une courbe dont l'abscisse est égale à a, et est parvenu en un point dont l'abscisse est x, on a les équations

$$\omega^2=2g(x-a)=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,\ t=\left(\frac{1}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\int_a^x \frac{ds}{dx}\,\frac{dx}{\sqrt{x-a}}:$$

Rapportons tout maintenant au point le plus bas M, c'est-à-dire comptons les abscisses à partir de l'horizontale MN, et les arcs à partir de M dans le sens MQ : d'après cela $ds=-ds'$, $x=b-x'$, s' et x' désignant les nouvelles valeurs de s et x, ainsi

$$t=\left(\frac{1}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\int_c^0 \frac{ds'}{dx'}\,\frac{dx'}{\sqrt{b-x'-a}}=-\left(\frac{1}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\int_c^0 \frac{ds}{dx}\,\frac{dx}{\sqrt{c-x}},$$

en posant $b-a=c$, et supprimant les accents, ou bien encore

$$t=\left(\frac{1}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^c f(x)\,\frac{dx}{\sqrt{c-x}},\ f(x)=\frac{ds}{dx}:$$

pour que la courbe soit tautochrone, il faut que t soit indépendant, ou que sa dérivée par rapport à c soit nulle ; mais pour pouvoir différentier sous le signe $\int$, il faut que les limites soient indépendantes de c ; d'après cela posons $cy=x$, il vient

$$t=\left(\frac{1}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^t f(cy)\frac{dy}{\sqrt{c-cy}}=\left(\frac{1}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^t \frac{f(cy)\sqrt{c}\,dy}{\sqrt{1-y}}.$$

Égalant à zéro la dérivée par rapport à c, on obtient

$$(\alpha)\ \frac{f'(cy)\sqrt{c}\,y}{\sqrt{1-y}}+\frac{f(cy)}{2\sqrt{c}\sqrt{1-y}}=0,$$

ou

$$2f'(cy)cy+f(cy)=0,$$

ou bien

$$2f'(x)x+f(x)=0,$$

ce qui revient à

$$2d.\frac{f(x)x}{dx}+f(x)=0,$$

ou

$$2d\frac{f(x)}{f(x)}+\frac{dx}{x}=0:$$

l'intégration donne

$$lf(x)^2+l.x=\text{const.}=C=l(xf(x)^2),$$

ou

$$xf(x)^2=C_1,\ f(x)^2=\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=C_1x^1,$$

ou bien enfin

$$\frac{ds}{dx}=C_1x^{\frac{1}{2}},$$

équation d'une cycloïde rapportée au point le plus bas.

Il semble, au premier abord, qu'on a commis une erreur en posant l'équation (α) et non pas $\int_0^t(\alpha)\,dy=0$; mais il est facile de voir que cette dernière ne peut exister que tout autant que $(\alpha)=0$, car (α) étant une fonction de c et y, on peut considérer

$$\left(\frac{1}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^t (z)dy = 0,$$

comme représentant le temps que met un mobile à passer du point dont l'abscisse est zéro à celui dont l'abscisse est t sur une certaine courbe, et ce temps ne saurait être nul.

On pourrait parvenir plus facilement au résultat précédent; car si la courbe est tautochrone, en chaque point la composante suivant la tangente est proportionnelle à l'arc à parcourir; or, cette composante est elle-même proportionnelle au cosinus de l'angle de la tangente avec la direction de la pesanteur, on a donc

$$\frac{dx}{ds} = as, \quad dx = asds,$$

$$x = \frac{1}{2}as^2,$$

ou bien

$$s = Cx^{\frac{1}{2}}.$$

La cycloïde est donc la seule courbe tautochrone.

246. Nous allons lui reconnaître une autre propriété non moins remarquable.

Fig. 73. Prolongeons BS jusqu'en R, de sorte que RS=SB, et traçons les deux demi-cycloïdes CR, RD ayant un cercle générateur d'un diamètre RS, elles seront les développantes des deux moitiés correspondantes de la cycloïde CBD; ainsi un fil d'une longueur $RB=2a$ étant suspendu au point R, et s'enveloppant successivement sur les deux courbes CR, RD, tracera par son autre extrémité la cycloïde CBD: cela fournit le moyen de construire un pendule cycloïdal. Supposons, en

effet, que les courbes CR, RD soient construites en relief, qu'un fil flexible et inextensible soit suspendu au point R, si, à son autre extrémité, on attache un corps pesant et si on écarte ce fil de sa position initiale, de manière qu'il s'enveloppe, en tout ou en partie sur l'une des courbes, et que la partie non enveloppée lui soit tangente, le mobile décrira la cycloïde CBD, et la durée des oscillations de ce pendule dans le vide sera indépendante de leur amplitude. Ce moyen serait sans précision dans la pratique, d'autant plus que l'isochronisme des grandes oscillations n'aurait plus lieu dans l'arc, dont la résistance n'est pas proportionnelle à la vitesse, condition nécessaire pour que la cycloïde soit tautochrone dans un milieu résistant.

Cherchons la courbe qu'un corps pesant doit suivre dans le vide et sans vitesse initiale pour parvenir d'un point à un autre dans le temps le plus court : on nomme *cette courbe brachistochrone* ou *de plus vite descente*.

Soient A et B les points de départ et d'arrivée; il s'agit de déterminer entre toutes les lignes aboutissant à ces deux points, celle que le mobile parcourra dans le temps le plus court. Nous avons généralement, en désignant par a et b les abscisses verticales des points A et B, Fig. 74.

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^b \frac{ds}{dx}\frac{dx}{\sqrt{x-a}}:$$

si on place l'origine au point A, alors $a=o$, $h=b-a=b$, et cette équation devient

$$T=\frac{1}{(2g)^{\frac{1}{2}}}\int_o^h \frac{ds}{dx}\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}};$$

il s'agit de trouver le minimum de cette expression ; or, x étant variable indépendante, on a

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+y'^2+z'^2},$$

$$\mathrm{T}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h(1+y'^2+z'^2)\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}:$$

cette fonction semble très-compliquée et embarrassante pour la détermination du minimum; mais rien ne nous empêche de supposer l'une des fonctions qui y entrent exprimée en fonction de l'autre, par exemple, z' en fonction de y', alors la condition du maximum ou minimum sera

$$\mathrm{Y}-\frac{d\mathrm{P}}{dx}=0:$$

or ici $\mathrm{Y}=0$, d'où résulte $\frac{d\mathrm{P}}{dx}=0$; et comme

$$\mathrm{P}=\frac{y'}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+y'^2+z'^2}},$$

cette égalité revient à

$$\frac{y'}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=\text{const.}=\mathrm{C}\cdot$$

en exprimant au contraire y' en fonction de z', on arriverait à la condition

$$\frac{z'}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=\mathrm{C}',$$

divisant ces deux résultats on obtient

$$\frac{z'}{y'}=\frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{C}},\ \frac{z'}{\mathrm{C}'}=\frac{y'}{\mathrm{C}}\quad\text{ou}\quad\frac{z}{\mathrm{C}'}=\frac{y}{\mathrm{C}}+\mathrm{K},$$

équation d'un plan vertical, d'où il résulte d'abord que *la courbe cherchée est toute entière située dans un plan vertical, passant par les deux points* A et B : si nous prenons ce plan pour celui des (xy), $z=0$ et la seule condition est

$$\frac{y'}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+y'^2}}=\text{C ou } \frac{y'^2}{1+y'^2}=\text{C}x=\frac{1}{1+\frac{1}{y'^2}};$$

quand la tangente est horizontale

$$y'=\infty,\ \frac{1}{y'}=0 \quad \text{et} \quad \text{C}x=1,$$

d'où

$$x=\frac{1}{b'},$$

b' étant l'abscisse du point le plus bas ; on tire de là $\text{C}=\frac{1}{b'}$, et par suite

$$\frac{y'^2}{1+y'^2}=\frac{x}{b'}:$$

or

$$1+y'^2=\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=s'^2,$$

donc cette dernière équation revient à

$$\frac{s'^2-1}{s'^2}=\frac{x}{b'}=1-\frac{1}{s'^2},$$

d'où

$$s'^2=\frac{b'}{b'-x},\ s'=\frac{b'^{\frac{1}{2}}}{(b'-x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{ds}{dx}:$$

intégrant on a pour la valeur de s,

$$s=-2b'^{\frac{1}{2}}(b'-x)^{\frac{1}{2}}+2b',$$

$$2b'-s=2b'^{\frac{1}{2}}(b'-x)^{\frac{1}{2}},$$

équation d'une cycloïde dont le point A est l'origine, ayant pour base l'horizontale passant par ce point et dont le cercle générateur a pour diamètre b' : donc *la cycloïde est brachistochrone et est la seule.*

Il est vrai que cette courbe appartient au maximum comme au minimum; mais comme le temps de la chute n'est pas susceptible de maximum, la condition que nous avons exprimée se rapporte à un minimum absolu.

Si la courbe cherchée devait être tracée sur une surface $L=0$, la solution n'offrirait maintenant aucune difficulté.

Si les points A et B n'étaient pas fixes et donnés, et qu'ils dussent seulement se trouver sur des courbes ou des surfaces données, la brachistochrone, dans le vide, serait encore une cycloïde, et les coordonnées de ces deux points s'obtiendraient à l'aide du calcul des variateurs. Dans un milieu résistant, la brachistochrone ne sera plus une cycloïde, et son équation différentielle, variable avec la loi de la résistance, sera encore fournie par le calcul des variations.

CHAPITRE V.

MOUVEMENT DE PLUSIEURS POINTS MATÉRIELS ASSUJETTIS A DES LIAISONS QUELCONQUES. PRINCIPE DE D'ALEMBERT. PRINCIPE DE LAGRANGE.

247. Nous avons exposé les conditions générales du mouvement d'un point matériel entièrement libre, d'un point matériel soumis à l'action de diverses forces ou assujetti à se mouvoir sur une courbe ou une surface donnée. Il s'agit maintenant d'établir les conditions générales du mouvement d'un système de points matériels assujettis à des liaisons quelconques.

La loi du mouvement d'un point matériel libre consiste en ce que la quantité de mouvement acquise par le corps dans l'unité de temps et dans la direction de la force par laquelle il est sollicité, est constamment égale à l'effort que la force exerce sur le corps. Si le point matériel est assujetti à se mouvoir sur une ligne ou sur une surface donnée, la recherche des conditions du mouvement se ramène à celle d'un point matériel libre, en introduisant dans les équations qui comprennent ces conditions la force qui représente l'effort par lequel le point matériel est retenu sur la ligne ou sur la surface.

Considérons maintenant un système de points matériels assujettis entre eux d'une manière quelconque, qui se meuvent, et auxquels sont appliquées des forces. Les liaisons établies entre ces points ne permettent

pas en général qu'ils cèdent librement à l'action des forces qui leur sont respectivement appliquées, et qu'on puisse déterminer leur mouvement d'après les règles qui conviennent à un point matériel seul : le mouvement d'un point pris isolément résulte évidemment de la vitesse initiale, de la force intérieure qui lui est appliquée, et des actions intérieures qui s'établissent entre ce point et les autres points du système : actions qui dépendent de la nature des liaisons.

248. Supposons plusieurs points matériels A, A′, A″ etc. dont les masses sont m, m', m'', etc., assujettis à certaines liaisons données : à ces points sont appliquées des forces P, P′, P″ etc. : il s'agit de déterminer le mouvement du système. Pour que les forces soient bien déterminées, il faudra connaître leurs directions ; ainsi on donne

$$\frac{X}{P}, \frac{X'}{P'} \ldots\ldots \frac{Y}{P}, \frac{Y'}{P'} \ldots\ldots \frac{Z}{P}, \frac{Z'}{P'} \ldots\ldots;$$

xyz, $x'y'z'$ etc. étant les coordonnées des points A, A′ etc. dont on connaît les positions et les vitesses initiales, les liaisons qui existent entre ces points, sont des fonctions de xyz, $x'y'z'$ etc. et de t, représentées par $L=0$, $M=0$, $N=0$, etc. Il faut déterminer le mouvement que prendra le système sous l'action des forces P, P′, P″, mouvement évidemment modifié par l'influence des liaisons.

Si au système P, P′, P″ etc. on substitue un système Q, Q′, Q″ etc. différent, le mouvement sera alors généralement différent ; mais on peut affirmer que si les deux systèmes sont équivalents entre eux, c'est-à-dire équilibrés par un troisième dans les circonstances ac-

tuelles ou bien eu égard aux liaisons données, le système prendra le même mouvement et réciproquement. En effet, soit que le système soit sollicité par P, P′P″etc. ou Q, Q′Q″, etc. les points partant des mêmes positions initiales, sont doués des mêmes vitesses initiales et soumis aux mêmes liaisons; le mouvement produit par P, P′ P″etc. ne sera pas troublé par l'addition des deux systèmes P, P′, P″.... R, R′R″... qui se font équilibre; mais on peut, sans altérer le mouvement, supprimer deux systèmes qui se font équilibre : supprimons donc P, P′, P″... et R, R′, R″..., et il ne restera pour produire le même mouvement que Q, Q′, Q″...; il est donc démontré que si deux systèmes sont équivalents, chacun d'eux produit le même mouvement.

Réciproquement, si les deux systèmes P, P′, P″... Q, Q′, Q″... produisent le même mouvement, ils sont équivalents; en effet, on peut ajouter le système R, R′R″. ., qui fait équilibre à P, P′, P″..., et le système Q, Q′, Q′... qui, par hypothèse, produit le même mouvement. Le mouvement primitif n'a pas changé, et les trois systèmes produisent ensemble le même effet que P, P′, P″... : ce qu'on ne peut concevoir qu'en admettant l'équilibre entre les deux systèmes Q, Q′, Q″... R, R′, R″..... ou l'équivalence entre P, P′, P″... et R, R′, R″...

Ces principes étant établis, il sera facile d'obtenir les équations du mouvement : les expressions

$$\frac{md^2x}{dt^2}\ldots\ldots\frac{md^2y}{dt^2}\ldots\ldots\frac{md^2z}{dt^2}\ldots\ldots,$$

représentent, non les composantes de P, P′, P″... suivant les axes, mais les composantes des forces, qui,

à elles seules, les points étant libres, pourraient produire les mouvements observés : représentons ces forces par Q, Q', Q''.... : ces forces peuvent produire les mouvements observés sans que les liaisons y entrent pour rien, sans qu'elles existent : il résulte de là que le mouvement produit par le système Q, Q'.... est compatible avec les liaisons. On peut donc les supprimer ou les laisser exister sans rien changer au mouvement : nous supposerons qu'elles existent pendant l'action du système Q, Q', Q''.... ; alors les deux systèmes P, P'... Q. Q'..., produisant le même mouvement, sont équivalents, et il suffit, pour obtenir les équations du mouvement, d'écrire que cette équivalence a lieu ou qu'il y a équilibre entre le système Q, Q', etc... et le système P, P'... pris en sens contraire. — Le principe de d'Alembert se trouve ainsi établi.

En effet, considérons en général l'une des forces appliquées au système : on peut la concevoir décomposée en deux autres forces, dont l'une imprimerait à ce point, s'il était libre, le mouvement qu'il prend véritablement, et dont l'autre est détruite par l'effet des actions mutuelles qui s'établissent entre les parties du système. La première composante est la *force conservée*, et la deuxième est la *force perdue* : ainsi l'on voit que la nature des mouvements affectés par le système consiste en ce que les forces perdues doivent se détruire réciproquement ou se faire constamment équilibre en vertu de la liaison des points matériels. C'est en cela que consiste le principe de d'Alembert. On voit d'ailleurs qu'établir l'équilibre entre les forces perdues, est la même chose qu'établir l'équilibre entre

les forces conservées et les forces appliquées au système prises en sens contraire ; puisque pour chaque point du système la force perdue est égale et directement opposée à la résultante de la force conservée et de la force appliquée au système prise en sens contraire : or c'est précisément là l'énoncé de notre résultat.

249. Appliquons ce qui précède à un système invariable. Nous avons vu en statique que, dans ce cas, pour que deux systèmes soient équivalents, il faut que les deux forces principales et les deux moments principaux soient égaux : les sommes des projections des forces sur les axes doivent par conséquent être égales, et on a

$$X+X'+X''+\ldots..=m\frac{d^2x}{dt^2}+m'\frac{d^2x'}{dt^2}+m''\frac{d^2x''}{dt^2}+\ldots..$$

$$Y+Y'+Y''+\ldots..=m\frac{d^2y}{dt^2}+m'\frac{d^2y'}{dt^2}+m''\frac{d^2y''}{dt^2}+\ldots..$$

$$Z+Z'+Z''+\ldots..=m\frac{d^2z}{dt^2}+m'\frac{d^2z'}{dt^2}+m''\frac{d^2z''}{dt^2}+\ldots..,$$

ou pour abréger

$$\Sigma X=\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2},\ \Sigma Y=\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2},\ \Sigma Z=\Sigma m\frac{d^2z}{dt^2};$$

On sait d'ailleurs que la projection du mouvement d'une force principale, sur l'axe des x, par exemple, est représentée par une série de termes de la forme

$$P(y\cos.\nu-z\cos.\mu)=yZ-zY,$$

on aura donc

$$\Sigma(yZ-zY)=\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

$$\Sigma(zX-xZ)=\Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

$$\Sigma(xY-yX)=\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right),$$

Ces équations suffisent pour déterminer après un temps t la position de tous les points du système. Car évidemment il suffit d'en déterminer trois d'entre eux : or ceux-ci seront toujours liés par trois relations, et il y a neuf coordonnées à obtenir, il suffira donc de six équations de mouvement.

On obtiendra avec la même facilité les équations du mouvement, lorsque le système invariable sera assujetti à tourner soit autour d'un point fixe, soit autour d'un axe fixe.

250. Considérons en second lieu la machine d'*Atwood*, c'est-à-dire le mouvement de deux corps pesants liés entre eux par un fil inextensible qui s'enroule sur une poulie.

Fig. 74. Supposons que ces corps sont réduits à des points matériels dont les masses sont m et m'; les forces motrices sont gm et gm', et agissent dans le même sens, qui est celui de la pesanteur. Soit ω la vitesse acquise par le mobile m au bout du temps t; la vitesse de m' au bout de ce temps sera la même, prise seulement avec un signe contraire, car la longueur du fil est constante : Q et Q' étant deux forces capables de produire les mouvements observés, c'est-à-dire les mouvements des points matériels s'ils étaient libres, et R, R' deux forces égales et contraires à ces deux-là, on aura

$$Q = m\frac{d\omega}{dt},\quad Q' = m'\frac{d\omega}{dt}:$$

pour avoir les équations du mouvement, il suffit d'établir les conditions d'équilibre entre les quatre forces gm, gm', R et R'; or R agit en sens contraire

de Q ou bien en sens contraire de gm, tandis que R′ agit en sens contraire de Q′, et par suite dans le sens de gm', car nous supposons $m > m'$; on a donc pour condition d'équilibre.

$$gm - m\frac{d\omega}{dt} = gm' + m'\frac{d\omega}{dt},$$

d'où

$$\frac{dm}{dt} = \frac{g(m-m')}{m+m'} = g' :$$

ainsi, *le mouvement est uniformément accéléré* : on voit de plus que l'on peut rendre le mouvement aussi lent que l'on veut.

251. Considérons maintenant deux points matériels suspendus à deux fils inextensibles qui s'enroulent sur un treuil.

75 Soient toujours m, m' les masses, et gm, gm' les forces motrices : si nous désignons par s, s' les espaces parcourus dans un temps t, ces espaces seront proportionnels aux rayons r, r' des cylindres correspondants ; et en désignant par θ l'angle décrit par un point du treuil on aura

$$\frac{s}{r} = \frac{s'}{r'} = \theta,$$

d'où en différentiant

$$\frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{r'}\frac{ds'}{dt} = \frac{d\theta}{dt},$$

ou bien, en désignant les vitesses des deux points par ω, ω',

$$(1)\ \frac{\omega}{r} = \frac{\omega'}{r'} = \frac{d\theta}{dt} = \gamma,$$

($\frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire que nous représentons par γ) :

les forces capables de produire les mouvements observés sont

$$Q=m\frac{d\omega}{dt},\ Q'=m'\frac{d\omega'}{dt},$$

et il suffit d'établir l'équilibre entre les quatre forces *gm*, *gm'*, et R, R', ou bien entre les deux forces

$$gm-m\frac{d\omega}{dt},\ gm'+m'\frac{d\omega'}{dt},$$

et d'après les conditions d'équilibre du treuil nous aurons

$$\left(gm-m\frac{d\omega}{dt}\right)r=\left(gm'+m'\frac{d\omega'}{dt}\right)r':$$

or de (1) on tire

$$\frac{d\omega}{dt}=r\frac{d\gamma}{dt},\ \frac{d\omega'}{dt}=r'\frac{d\gamma}{dt},$$

donc

$$gmr-mr^2\frac{d\gamma}{dt}=gm'r'+m'r'^2\frac{d\gamma}{dt},$$

d'où

$$\frac{d\gamma}{dt}=g\frac{mr-m'r'}{mr^2+m'r'^2},$$

équation qui fait connaître la vitesse angulaire; en vertu de cette valeur, il vient

$$\frac{d\omega}{dt}=r\frac{d\gamma}{dt}=g\frac{r(mr-m'r')}{mr^2+m'r'^2},$$

et

$$\frac{d\omega'}{dt}=r'\frac{d\gamma}{dt}=g\frac{r'(mr-m'r')}{mr^2+m'r'^2}:$$

on voit d'après ces équations que *le mouvement de chaque point est encore ici uniformément accéléré.*

252. Considérons enfin deux points matériels dont es masses sont m, m' assujettis à se mouvoir sur deux plans inclinés formant avec l'horizon des angles θ, θ', et liés l'un à l'autre par un fil flexible qui passe sur une poulie placée au sommet des deux plans. Fig. 77.

On suppose comme précédemment que le système de ces deux points a reçu une vitesse initiale, et qu'il est ensuite soumis à l'action de la gravité : il s'agit de rechercher la nature du mouvement qu'il affectera.

En nommant ω, ω' les vitesses des deux points, et raisonnant comme dans les deux cas précédents, on trouve

$$gm\sin.\theta - m\frac{d\omega}{dt} = gm'\sin.\theta' + m'\frac{d\omega}{dt},$$

d'où

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{g(m\sin.\theta - m'\sin.\theta')}{m+m'} = g',$$

et en intégrant

$$\omega = \frac{m\sin.\theta - m'\sin.\theta'}{m+m'}gt + \mathrm{V},$$

V étant la valeur initiale de ω.

Le mouvement des points est uniformément accéléré ou retardé : il est dû à une force constante plus petite que l'action de la gravité dans le rapport exprimé par la fraction

$$\frac{m\sin.\theta - m'\sin.\theta'}{m+m'}.$$

Si le plan sur lequel se meut le point m était vertical et l'autre horizontal, la formule précédente deviendrait

$$\omega = \frac{m}{m+m'}gt + \mathrm{V};$$

le mouvement est dû à l'action d'une force moindre que la gravité dans le rapport de la masse du corps descendant à la somme des masses des deux corps.

Si les lignes décrites par les corps étaient toutes deux verticales, la formule dont il s'agit donnerait

$$\omega=\frac{m-m'}{m+m'}gt+\text{V};$$

on retombe ainsi sur le premier cas que nous avons considéré.

La question n'est pas plus difficile à résoudre dans le cas où les points matériels sont soutenus par des fils qui s'enroulent sur deux cercles de diamètre différent montés sur ces mêmes axes fixes : ce cas comprend notre application au treuil.

253. Nous terminerons par l'examen du cas où on tient compte du frottement exercé par chacun des corps sur les plans inclinés, la résistance due à ce frottement étant supposée proportionnelle à la pression exercée par les corps contre ce plan.

Soit f le rapport du frottement à la pression, pour le premier corps, f' le même rapport pour le deuxième corps, l'équation d'équilibre deviendra

$$mg\sin.\theta-fmg\cos.\theta-m\frac{d\omega}{dt}=m'g\sin.\theta'-f'm'g\cos.\theta'+m'\frac{d\omega}{dt},$$

d'où

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{m(\sin.\theta-f\cos.\theta)-m'(\sin.\theta'-f'\cos.\theta')}{m+m'}g,$$

$$\omega=\frac{m(\sin.\theta-f\cos.\theta)-m'(\sin.\theta'-f'\cos.\theta')}{m+m'}gt+\text{V}:$$

le mouvement commun des deux corps est toujours uniformément accéléré ou retardé.

On pourrait encore appliquer le principe de d'Alembert au mouvement de deux points matériels soumis à leur attraction ou à leur repulsion mutuelle, ainsi qu'au choc des corps.

254 Considérons de nouveau les systèmes P, P′, P″... et Q, Q′, Q″.... ; il faut, pour avoir les équations du mouvement, écrire l'équivalence des deux systèmes ; pour cela on exprime successivement les conditions d'équilibre de chacun de ces deux systèmes et d'un troisième R, R′, R″.... Or, pour qu'il y ait équilibre entre les deux systèmes P, P′, P″... et R R′, R″..., il faut, d'après le principe des vitesses virtuelles, que la somme des produits de chaque force par la projection de la vitesse sur cette force, c'est-à-dire la somme des mouvements virtuels, soit nulle : de même pour les deux systèmes Q, Q′, Q″.... R, R′, R″..., par conséquent pour exprimer l'équivalence des systèmes P et Q, il faudra écrire que la somme des mouvements virtuels de P, P′, P″... est égale à la somme des mouvements virtuels de Q, Q′, Q″... : cela posé, on appelle mouvement effectif après un temps t, le mouvement réel que prend le système au bout de ce temps, en vertu des liaisons et des forces ; le mouvement virtuel est celui que prend le système au bout du temps t et dans un instant très-court, en vertu des liaisons et des forces supposées invariables pendant cet instant, et égales à ce qu'elles sont au commencement de cet instant : ainsi si les liaisons et les forces sont indépendantes du temps, le mouvement effectif pourra être pris pour un mouvement virtuel, et c'est ainsi qu'on obtient une formule générale, de laquelle on peut déduire, dans chaque cas, les équations du mou-

vement, comme l'on déduit toutes celles d'équilibre du principe des vitesses virtuelles. Cette solution du problème général de dynamique est due à *Lagrange*. Nous n'entrerons pas dans de plus grands détails à cet égard.

CHAPITRE VI.

MOUVEMENT DE ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE. MOMENTS D'INERTIE.

---

§ Ier.

Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe quelconque.

255. DANS le chapitre précédent, nous avons trouvé les équations du mouvement de plusieurs points matériels liés invariablement entre eux et soumis à l'action de forces quelconques. Si nous supposons maintenant que ce système de points est assujetti à tourner autour d'un axe fixe, et si en outre nous prenons l'axe fixe pour axe des z, les équations du mouvement se réduiront à la suivante :

$$(1)\quad m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\text{etc.},=(xY-yX)+\text{etc.},$$

ou

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\Sigma(xY-yX).$$

Cette équation peut se mettre sous une autre forme

en remarquant que chaque point du corps ou du système décrit un cercle autour de l'axe fixe : ainsi, si l'on considère un point matériel dont la distance à l'axe fixe soit r, on aura pour le cercle décrit par ce point $x^2+y^2=r^2$, d'où l'on tire en différentiant

$$xdx+ydy=0,$$

ou

$$\frac{dy}{x}=\frac{dx}{-y}=\pm\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{r}:$$

or

$$\omega=\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dt},$$

donc

$$(2)\quad \frac{dx}{x}=\frac{dx}{-y}=\pm\frac{\omega dt}{r}.$$

Avant d'aller plus loin, voyons dans quel cas il faudra prendre le signe plus et dans quel cas il faudra prendre le signe moins ; soit A la projection sur le plan xy, du point mobile dont il s'agit. Si ce point a un mouvement direct, c'est-à-dire s'il marche vers l'axe OY des y positifs, y croîtra avec le temps tant que le point sera dans l'angle YOX, ainsi $\frac{dy}{dx}$ sera positif, $\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$ sera aussi positif : ce produit aura encore le même signe lorsque le point se mouvera dans l'angle YOX' avec un mouvement direct, et de même dans les autres angles. Donc le signe plus correspond au mouvement direct, et le signe moins au mouvement rétrograde : la même chose a lieu pour le produit $\frac{1}{-y}\frac{dy}{dt}$. Fig. 77.

256. Revenons maintenant à l'équation (2). Soient ω. ω', etc., les vitesses des points matériels, s, s', etc., les espaces parcourus par ces points, r, r', etc., leurs distances à l'axe fixe, γ la vitesse angulaire du corps solide, θ l'angle décrit par chaque point dans un temps t, on aura

$$\omega = \frac{ds}{dt},\ \omega' = \frac{ds'}{dt}, \text{ etc.},$$

or

$$\frac{s}{r} = \frac{s'}{r'} = \text{etc.}\ldots, = \theta$$

ainsi

$$\frac{ds}{rdt} = \frac{ds'}{r'dt} = \text{etc.}\ldots\ldots = \frac{d\theta}{dt} = \gamma,$$

ou

$$\frac{\omega}{r} = \frac{\omega'}{r'} = \text{etc.}\ldots = \gamma:$$

d'après cela l'équation (2) devient

$$\frac{dy}{x} = -\frac{dx}{y} = \pm \gamma\, dt,$$

pour un autre point matériel on aura de même

$$\frac{dy'}{x} = -\frac{dx'}{y'} = \pm \gamma dt,$$

et ainsi de suite. Par conséquent,

$$\frac{dy}{x} = \frac{dy'}{x'} = \text{etc.}, = \frac{dx}{-y} = \frac{dx'}{-y'} = \text{etc.},$$

et par suite l'équation (1) devient

$$(3)\ m\left(\frac{dxd^2x+dyd^2y}{dt^2}\right) + m\left(\frac{dx'd^2x'+dy'd^2y'}{dt^2}\right) + \text{etc.},$$
$$= \text{X}dx + \text{Y}dy + \text{X}'dx' + \text{Y}'dy' + \text{etc.},$$

voilà déjà une nouvelle forme de l'équation du mouvement.

257. On peut lui donner une forme encore plus simple en introduisant les vitesses des points matériels.

Soient P, P', P'', etc., les forces qui produisent le mouvement : les cosinus des angles de la force P avec les axes des cordonnées sont

$$\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}, \frac{Z}{P},$$

ceux de la vitesse ω correspondante sont

$$\frac{dx}{\omega dt}, \frac{dy}{\omega dt}, \frac{dz}{\omega dt}:$$

ainsi on aura

$$(4)\quad \cos.(P,\omega) = \frac{Xdx+Ydy}{P\omega dt},$$

ou

$$Xdx+Ydy = P\omega\cos.(P,\omega);$$

on a d'un autre côté

$$\omega^2 = \frac{dx^2+dy^2}{dt^2},$$

d'où l'on tire en différentiant

$$(5)\quad \omega d\omega = \frac{dxd^2x+dyd^2y}{dt^2}:$$

On aurait des équations analogues pour les autres forces et les autres points matériels; donc, en vertu de (4) et de (5) l'équation (3) se change en (6).

$$m\omega d\omega + m'\omega' d\omega' + \text{etc.}, = \left\{ P\omega\cos.(P,\omega) + P'\omega'\cos.(P',\omega') + \text{etc.}, \right\} dt.$$

Cette nouvelle équation est l'*équation différentielle*



des forces vives, c'est en même temps l'équation du mouvement d'un système invariable autour d'un axe fixe.

258. On peut établir directement cette équation. En effet, soient A, A', etc., divers points matériels liés invariablement entre eux et conservons les mêmes notations : soit de plus Q, Q', etc., un système de forces qui produit sur l'ensemble des points matériels non soumis aux liaisons, le même effet que le système P, P', P'', etc., ce sera un système équivalent à ce dernier ; et, si on l'applique en sens contraire, il lui fera équilibre : or, si nous décomposons chacune des forces Q, Q', etc., en deux autres, l'une perpendiculaire au plan qui passe par le point matériel et l'axe fixe, l'autre dirigée dans ce plan : les premières composantes auront seules leur effet et seront égales à

$$m\frac{d\omega}{dt},\ m'\frac{d\omega'}{dt}\ \text{etc.,}$$

les composantes dirigées dans les divers plans formés par l'axe fixe et les points matériels et qui sont égales à

$$m\frac{\omega^2}{r},\ m'\frac{\omega'^2}{r'},\ \text{etc.,}$$

n'auront aucune action. Décomposons de même les forces P, P', P''... en deux autres, les unes suivant les directions de la vitesse et qui sont égales à

$$P\cos.(P,\omega), P'\cos.(P',\omega'),\ \text{ect.,}$$

et les autres perpendiculaires à cette direction, et qui seront sans effet : si maintenant on exprime qu'il y a équilibre entre les deux systèmes de composantes efficaces, on aura

$$mr\frac{d\omega}{dt}+m'r'\frac{d\omega'}{dt}+\text{etc.},=\text{P}r\cos.(\text{P},\omega)+\text{P}'r'\cos.(\text{P}',\omega')+\text{etc.},$$

or nous avons

$$(7)\quad \frac{\omega}{r}=\frac{\omega'}{r'}=\text{etc.}=\gamma,$$

donc l'équation précédente revient à

$$m\omega\frac{d\omega}{dt}+m'\omega'\frac{d\omega'}{dt}+\text{etc.},=\text{P}\omega\cos.(\text{P},\omega)+\text{P}'\omega'\cos.(\text{P}',\omega')+\text{etc.},$$

même formule que la formule (0).

259. En supposant l'axe fixe quelconque, on a généralement

$$\text{P}\omega\cos.(\text{P},\omega)=\frac{\text{X}dx+\text{Y}dy+\text{Z}dz}{dt},$$

en vertu de cette égalité, on tire de l'équation précédente

$$\frac{1}{2}d(m\omega^2+m'\omega'^2+\text{etc.},)=\text{X}dx+\text{Y}dy+\text{Z}dz+\text{X}'dx'+\text{etc.}$$

Considérons maintenant le cas particulier où les forces P, P', etc., sont nulles, alors

$$\frac{1}{2}d(m\omega^2+m'\omega'^2+\text{etc.},)=0,$$

d'où, en vertu de (7), on tirera en intégrant,

$$m\omega^2+m'\omega'^2+\text{etc.},=(mr^2+m'r'^2+\ldots\ldots)\gamma^2,$$

et en posant

$$mr^2+m'r'^2+\text{etc.},=\text{K},$$

on aura

$$m\omega^2+m'\omega'^2+\text{etc.},=k\gamma^2,$$

k est ce que l'on nomme le *moment d'inertie* du système : cette quantité varie, comme nous le verrons,

avec l'axe fixe : dans le cas dont il s'agit, celui où les forces sont nulles, la vitesse angulaire est constante, car $k\gamma d\gamma=0$, d'où $\gamma=$ constante; donc le mouvement de rotation est uniforme.

260. Dans ce cas, il est facile de trouver la pression exercée sur l'axe fixe en vertu de la vitesse du système : en effet, la force normale qui agit sur le point matériel dont la masse est $m\,\frac{\omega^2}{r}$, et les projections de cette force sur les axes sont

$$m\gamma^2x,\ m\gamma^2y,$$

en ayant soin de remplacer $\frac{\omega}{r}$ par γ; pour un autre point ces projections sont

$$m'\gamma^2x',\ m'\gamma^2y',$$

ainsi de suite; donc les projections de la résultante de toutes les actions normales sur les axes seront

$$(mx+m'x'+\text{etc.},)\gamma^2=M\xi\gamma^2,\quad (my+m'y'+)\gamma^2=M\eta\gamma^2,\ \text{et } 0.$$

M étant une moyenne entre les masses des divers points, ξ, η les coordonnées du centre de gravité du système.

Les projections du moment linéaire sont en général

$$yZ-zY,\ zX-xZ,\ xY-yX,$$

et ici

$$Z=0,\ Z'=0,\ \text{etc.};$$

pour la pression résultant de la vitesse du point m, ces projections sont

$$m\gamma^2yz,\ m\gamma^2xz,$$

et de même pour les autres points. Ces projections

pour la résultante de toutes les pressions seront la somme d'une suite de termes de même forme et pourront s'indiquer ainsi,

$$\gamma^2\Sigma myz, \ \gamma^2\Sigma mxz, \text{ etc.},$$

ainsi l'on connaît la force principale et le moment linéaire principal des pressions exercées sur l'axe fixe. Le système des pressions est réduit à une force et à un couple : cette pression est détruite par la résistance de l'axe fixe.

261. Si, dans le système, il n'y avait qu'un point fixe au lieu d'un axe fixe, la force principale serait encore détruite; mais pour que le mouvement soit encore le même que le mouvement observé autour de l'axe fixe, il faudra que le couple disparaisse et que le moment linéaire principal soit nul, c'est-à-dire qu'on ait

$$\gamma^2\Sigma myz = 0, \ \gamma^2\Sigma mxy = 0 :$$

dans ce cas le système tournera autour de l'axe comme si c'était un axe fixe, quoique cependant il n'y ait qu'un seul point de cet axe fixe.

§ II.

Détermination des moments d'inertie et des axes principaux.

262. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, le *moment d'inertie* d'un corps par rapport à une droite quelconque est la somme des éléments de sa masse, multipliés par les carrés de leurs distances à cette droite.

Cherchons maintenant à déterminer le moment

d'inertie k en fonction des angles que fait l'axe fixe avec les axes des coordonnées et des coordonnées des points mobiles. Or

$$k = mr^2 + m'r'^2 + \text{etc.}, = \Sigma mr^2,$$

ainsi nous parviendrons à notre but en déterminant r, r', etc., en fonction des quantités dont nous venons de parler.

Fig. 78. Soit OB l'axe fixe, O l'origine des coordonnées, λ, μ, ν les angles de OB avec les axes, xyz les coordonnées du point A, joignons OA et du point A abaissons la perpendiculaire AO sur OB, on aura

$$r^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OE}^2,$$

or

$$OE = OA \cos.(AOE),$$

et OA fait avec les axes des angles dont les cosinus sont

$$\frac{x}{AO}, \frac{y}{A}, \frac{z}{AO},$$

ainsi

$$\cos. AOE = \frac{x\cos.\lambda + y\cos.\mu + z\cos.\nu}{AO}:$$

de plus

$$Ao^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

donc

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos.\lambda + y\cos.\mu + z\cos.\nu)^2$$

et par suite

$$k = \Sigma mr^2 = \Sigma m \left\{ (x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos.\lambda + y\cos.\mu + z\cos.\nu)^2 \right\}:$$

telle est la *valeur du moment d'inertie*. Mais sous cette forme on ne voit pas comment ce moment varie avec la direction de l'axe par rapport au système, ce qu'il importe de connaître.

263. Développons l'expression ci-dessus de k, nous aurons

$$k=\Sigma m\left\{x^2+y^2+z^2-(x^2\cos.\lambda+\text{etc.}.+2yz\cos.\mu\cos.\nu+\ldots\right\},$$

De là nous tirerons, en réduisant et en remarquant que l'on peut faire sortir λ, μ, ν de dessous le signe Σ, qui est relatif aux coordonnées,

$$k=\sin.^2\lambda\Sigma mx^2+\sin.^2\mu\Sigma my^2+\sin.^2\nu\Sigma mz^2-2\cos.\mu\cos.\nu\Sigma myz$$
$$-2\cos.\nu\cos.\lambda\Sigma mzx-2\cos.\lambda\cos.\mu\Sigma mxy:$$

on peut encore chasser les sinus en remarquant que

$$\sin.^2\lambda=1-\cos.^2\lambda=\cos.^2\mu+\cos.^2\nu,$$

et alors

$$k=(\cos.^2\mu+\cos.^2\nu)\Sigma mx^2+(\cos.^2\nu+\cos.^2\lambda)\Sigma my^2$$
$$+(\cos.^2\lambda+\cos.^2\mu)\Sigma mz^2-2\cos.\mu\cos\nu\Sigma myz-2\cos.\nu\cos.\lambda\Sigma mzx$$
$$-2\cos.\lambda\cos.\mu\Sigma mxy.$$

Cette équation peut se mettre sous une autre forme en réunissant tous les termes qui multiplient un cosinus; alors en posant

$$A=\Sigma m(y^2+z^2),\quad B=\Sigma m(z^2+x^2),\quad C=\Sigma m(x^2+y^2),\quad D=\Sigma myz,$$
$$E=\Sigma mzx,\quad F=\Sigma mxy;$$

$$k=A\cos.^2\lambda+B\cos.^2\mu+C\cos.^2\nu-2D\cos.\mu\cos.\nu-2E\cos.\nu\cos.\lambda$$
$$-2F\cos.\lambda\cos.\mu.$$

Cette forme permet de voir comment k varie avec la direction de l'axe fixe.

264. Cherchons quelle position l'axe doit avoir pour que le moment d'inertie soit un *maximum* ou un *minimum*. Nous pouvons, à l'aide de l'équation précédente, arriver à cette détermination par des considérations géométriques. Supposons que par l'origine des coordonnées on mène une suite d'axes dans toutes les directions, et que sur chacun d'eux l'on porte une lon-

gueur qui soit pour tous la même fonction du moment d'inertie correspondant à cet axe. Le lieu géométrique des extrémités de toutes ces longueurs est une certaine surface qu'il est facile de déterminer. Désignons par α, β, γ les coordonnées courantes des extrémités, on aura

$$\cos.\lambda = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},\quad \cos.\mu = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},\quad \cos.\nu = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}.$$

et la valeur de k donnera (1)

$$k(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2-2D\beta\gamma-2E\gamma\alpha-2F\alpha\beta,$$

k étant par hypothèse fonction de la longueur $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, cette équation ne renferme que les inconnues α, β, γ; par conséquent c'est l'équation de la surface cherchée. Nous disposons arbitrairement de la fonction qui multiplie k, nous pouvons donc poser

$$k(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = 1,$$

ou

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

c'est-à-dire que la longueur que nous portons sur chaque axe est égale à l'unité divisée par la racine carrée du moment d'inertie correspondant à cet axe, l'équation (1) devient alors

$$A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2-2D\beta\gamma-2E\alpha\gamma-2F\alpha\beta = 1,$$

cette équation représente une surface du deuxième degré douée d'un centre : or k est une quantité toujours positive; ainsi $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ n'est jamais infini : donc tous les rayons vecteurs qui aboutissent à la surface ont des valeurs finies : d'où il résulte que la surface est un ellipsoïde : à son plus grand axe correspond le

minimum de k, et à son plus petit axe correspond le maximum : les axes de l'ellipsoïde sont appelés *axes principaux* du corps solide, et les moments qui y sont relatifs se nomment *moments d'inertie principaux*. Chaque moment d'inertie s'obtient en divisant l'unité par le carré du rayon vecteur dirigé suivant l'axe auquel il correspond.

L'équation de l'ellipsoïde se simplifie lorsqu'on le rapporte aux trois axes principaux, car elle ne doit plus contenir de doubles produits de coordonnées. Donc lorsqu'on prend pour axes de coordonnées les trois axes principaux d'un corps solide, on a

$$D=\Sigma myz=0,\quad E=\Sigma mzx=0,\quad F=\Sigma mxy=0,$$

et l'équation de l'ellipsoïde se réduit à

$$A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2=1.$$

Quand les trois conditions précédentes sont remplies, les axes des coordonnées sont les trois axes principaux du corps solide; or elles le sont lorsque le mouvement de rotation du corps solide se fait autour d'un des axes coordonnés sans qu'il y ait de pression contre cet axe, l'origine étant seulement supposée fixe. Ainsi, lorsqu'un *corps solide tourne autour d'un axe sans exercer aucune pression sur cet axe supposé fixe par l'origine seulement, de sorte que tout se passe comme s'il était entièrement fixe ; cet axe est un axe principal.*

Si l'ellipsoïde devient de révolution, deux mouvements d'inertie principaux sont égaux, et il y a une infinité de systèmes d'axes principaux : enfin, s'il devient une sphère, chaque système de trois axes rectangulaires est un système d'axes principaux, et tous les moments d'inertie sont égaux entre eux.

Les axes de coordonnées étant quelconques, il suffit pour trouver les moments d'inertie suivant ces axes, celui des x par exemple, de faire $\beta=0$, $\gamma=0$ dans l'équation de la surface : on trouve alors $A=\frac{1}{\alpha^2}$: ainsi, d'après ce que nous avons établi plus haut, A est le moment d'inertie demandé; de même B, C sont les moments d'inertie suivant les axes des y et des z : A, B, C deviennent les moments d'inertie principaux, quand le corps solide est rapporté à ses axes principaux.

265. Après avoir montré comment les moments d'inertie varient avec la direction de l'axe fixe, examinons comment ils sont modifiés suivant la position de l'origine. Supposons qu'on la transporte en un point dont les coordonnées soient a, b, c; soient r_1, r_1', etc, les distances des différents points du système à un axe passant par cette nouvelle origine, et k_1 le moment d'inertie relatif à cet axe. D'après ce qui précède on aura

$$K_1=\Sigma m r_1^2,$$

or r_1^2 s'obtiendra en changeant, dans l'expression de r^2, x, y, z en

$$x-a,\ y-b,\ z-c,$$

ainsi

$$r_1^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-\{(x\cos.\lambda+y\cos.\mu+z\cos.\nu)$$
$$-a\cos.\lambda-b\cos.\mu-c\cos.\nu\}^2=R^2-2ax-2by-2cz+r^2$$
$$+2(x\cos.\lambda+y\cos.\mu+z\cos.\nu)(a\cos.\lambda+b\cos.\mu+c\cos.\nu).$$

Si on pose

$$R^2=a^2+b^2+c^2-(a\cos.\lambda+b\cos.\mu+c\cos.\nu)^2;$$

on a donc, en désignant Σm par M,

$$K_1=K+MR^2+2(a\cos.\lambda+b\cos.\mu+c\cos.\nu)\cos.\lambda\Sigma mx+2(a\cos.\lambda$$
$$+b\cos.\mu+c\cos.\nu)\cos.\mu\Sigma my+2(a\cos.\lambda+b\cos.\mu+c\cos.\nu)\Sigma mz$$
$$-2a\Sigma mx-2b\Sigma my-2c\Sigma mz.$$

266. Si l'on suppose que la première origine des coordonnées est placée au centre de gravité du corps solide, les sommes qui entrent dans les derniers termes sont nulles; et on a simplement

$$K_{,}=K+MR^2.$$

A l'aide de cette formule, connaissant le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité, on obtient ce moment d'inertie par rapport à tout autre axe parallèle, et cela en ajoutant à celui qui est connu la masse du corps multipliée par le carré de la distance du centre de gravité au nouvel axe.

Donc, dans un corps quelconque, *le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité, est plus petit que par rapport à tout autre axe parallèle. Les moments d'inertie par rapport à deux axes parallèles entre eux, et également distants du centre de gravité, sont égaux entre eux, et leur valeur augmente à mesure que les axes s'éloignent de ce point.*

§ III.

Évaluation des moments d'inertie des corps solides.

267. La formule la plus commode pour cette détermination est

$$k=\sin.^2\lambda\,\Sigma mx^2+\sin.^2\mu\,\Sigma my^2+\sin.^2\gamma\,\Sigma mz^2-2\cos.\mu\cos.\nu\,\Sigma myz$$
$$-2\cos.\nu\cos.\lambda\,\Sigma mzx-2\cos.\lambda\cos.\mu\,\Sigma mxy:$$

en supposant que les axes des coordonnées coïncident avec les axes principaux, cette formule devient

$$k=\sin.^2\lambda\,\Sigma mx^2+\sin.^2\mu\,\Sigma my^2+\sin.^2\nu\,\Sigma mz^2:$$

posons pour simplifier

$$G=\Sigma mx^2,\ H=\Sigma my^2,\ I=\Sigma mz^2;$$

alors

$$(1)\ k=G\sin.^2\lambda+H\sin.^2\mu+I\sin.^2\nu,$$

telle est la formule dont nous allons faire usage.

268. Considérons un solide terminé par deux surfaces $z=z_0$, $z=Z$, deux cylindres $y=y_0$, $y=Y$, et deux plans $x=x_0$, $x=X$ (le plan des xy étant horizontal), et cherchons à déterminer G, H, I. Soit ν le volume d'un élément du corps solide, ρ sa densité ; ρ et ν sont fonctions des coordonnées xyz de cet élément, et en appelant m sa masse, $m=\rho\nu$; par conséquent

$$G=\Sigma\rho\nu x^2=\nu_1\rho_1x_1^2+\nu_2\rho_2x_2^2,\ \text{etc.}$$

en appelant ν_1, ρ_1, x_1, ν^2, ρ^2, x^2, etc., les mêmes quantités relatives aux divers éléments. Or on démontre dans le calcul infinitésimal que

$$\nu_1 f(x_1y_1z_1)+\nu_2 f(x_2y_2z_2)+\text{etc.}=\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}f(xyz)dzdydx,$$

donc

$$G=\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\rho x^2dzdydx=\int_{x_0}^{X}x^2\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\rho\,dz\,dy\,dx:$$

posons

$$\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\rho\,dzdy=\mu;$$

μ représentera la masse d'une section faite dans le corps par un plan perpendiculaire à l'axe des x, ρ étant la densité uniforme pour les points de cette section : alors

$$G=\int_{x_0}^{X}\mu x^2dx,$$

μ est généralement fonction de x ; ainsi on pourra obtenir cette intégration et déterminer G : dans le cas où ρ est constante, on a $\mu=\rho U$, U désignant l'aire de la section ; alors on a

$$(2)\quad G=\int_{x_0}^{X} Ux^2 dx,$$

on déterminera d'une manière analogue les quantités H et I.

269. Supposons qu'on veuille obtenir le moment d'inertie d'un parallélipipède rectangle homogène, par rapport à un axe passant par son centre. Soit a, b, c, les trois côtés du parallélipipède : prenons les axes des coordonnées respectivement parallèles à ces côtés. Dans ce cas, tout sera symétrique de part et d'autre des plans coordonnés, et l'ellipsoïde dont la construction détermine le moment d'inertie sera lui-même symétrique par rapport à ces axes : les axes des coordonnées, d'après cela, seront les axes principaux, car alors on aura

$$\Sigma myz=0,\ \Sigma mzx=0,\ \Sigma mxy=0:$$

ainsi pour déterminer le moment d'inertie dont il s'agit, nous pourrons employer la formule (1), dans laquelle il faut commencer par obtenir les valeurs de G, H, I.

Pour obtenir G, remarquons que dans (2) il faudra faire

$$x_0=-\frac{a}{2},\ X=\frac{a}{2}.$$

U est constamment égal à bc, ainsi

$$G=bc\rho\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2dx=2bc\rho\int_0^{\frac{a}{2}} x^2dx;$$

l'intégrale de

$$x^2dx \text{ est } \frac{x^3}{3},$$

l'intégrale définie est $\frac{a^3}{24}$, et par suite

$$G=\rho\frac{bca^3}{12}:$$

mais V étant le volume, et M la masse du parallélipipède on a

$$V=abc,\ M=\rho abc,$$

donc $G=\frac{Ma^2}{12}$, on aurait de même

$$H=\frac{Mb^2}{12},\ I=\frac{Mc^2}{12},$$

ainsi

$$(3)\quad k=M\frac{a^2\sin.^2\lambda+b^2\sin.^2\mu+c^2\sin.^2\nu}{12}.$$

Si le solide devient un cube

$$k=\frac{Ma^2}{12}(\sin.^2\lambda+\sin.^2\mu+\sin.^2\nu)=\frac{Ma^2}{6},$$

car

$$\sin.^2\lambda+\sin.^2\mu+\sin.^2\nu=3-(\cos.^2\lambda+\cos.^2\mu+\cos.^2\nu)=2.$$

On peut facilement obtenir le moment d'inertie par rapport à l'une des arêtes du parallélipipède, et le déduire du précédent. Pour avoir le moment d'inertie par rapport à l'axe des x, il suffit de faire dans

$$(3)\quad \lambda=0,\ \mu=\frac{\pi}{2},\ \nu=\frac{\pi}{2},$$

et alors on trouve

$$k=M\frac{b^2+c^2}{12}:$$

pour avoir le moment d'inertie $k_{,}$ par rapport à l'arête parallèle à l'axe des x, il suffit d'ajouter à k le produit MR^2 : or ici

$$R^2 = \frac{b^2+c^2}{4},$$

ce que l'on peut voir en introduisant les hypothèses précédentes dans la valeur de R, et en remarquant que dans cette valeur générale les lignes a, b, c sont doubles de celles que nous désignons ici par les mêmes lettres. On aura donc

$$k_{,} = M\,\frac{b^2+c^2}{3},$$

on déterminerait avec la même facilité les moments d'inertie par rapport aux arêt es b et c.

270. Cherchons maintenant le moment d'un ellipsoïde homogène, relatif à un axe passant par son centre. Soient a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde, son équation sera

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

On voit encore ici que les axes de l'ellipsoïde pris pour axes des coordonnées, sont les axes principaux. Ici

$$x_0 = -a,\ X = a,\ U = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

ainsi

$$G = \rho\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)x^2dx = \pi bc.\rho\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)x^2dx:$$

posons $x = as$, alors

$$x^3 = a^3s^3,\ x^2dx = a^3s^2ds,$$

et

$$G=\pi\rho a^3bc\int_{-1}^{1}(1-s^2)s^2ds=2\pi\rho a^3bc\int_0^{-1}s^2ds-2\pi\rho a^3bc\int_0^1 s^4ds$$

$$=\frac{2}{3}\pi\rho a^3bc-\frac{2}{5}\pi\rho a^3bc=2\pi\rho a^3bc\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{15}\pi\rho a^3bc:$$

or

$$M=\frac{4}{3}\pi\rho abc,$$

donc

$$G=\frac{1}{5}Ma^2,$$

de même

$$H=\frac{1}{5}Mb^2,\ I=\frac{1}{5}Mc^2,$$

et par suite

$$k=M\frac{a^2\sin.^2\lambda+b^2\sin.^2\mu+c^2\sin.^2\nu}{5}:$$

si l'ellipsoïde devient une sphère

$$k=\frac{2}{5}Ma^2,$$

alors a est le rayon de la sphère, et k est constant.

Fig. 79. 271. La formule générale s'applique également aux solides de révolution; mais dans ce cas on peut arriver à une formule plus simple.

Le plan des xy étant horizontal, et l'axe des z vertical, considérons un solide de révolution engendré par une surface terminée par une courbe PQ, deux plans PM, QN, perpendiculaires à l'axe des x pris pour axe de révolution, et cherchons le moment d'inertie par rapport à cet axe. Prenons une tranche de volume comprise entre deux ordonnées mp, nq ou

y et $y+\Delta y$ correspondants aux abscisses x et $x+\Delta x$, et cherchons le moment d'inertie de cette tranche : pour cela, décomposons-la en zones comprises entre deux cylindres dont les rayons sont r et $r+\Delta r$. Une zone aura pour volume

$$\pi\Delta x\left\{(r+\Delta r)^2-r^2\right\}=2\pi r\Delta r\Delta x\,(1+\varepsilon).$$

En nommant ρ la densité du solide de révolution que nous supposerons dépendre de r et de x, on aura pour la masse de cette zone

$$2\pi\rho r\Delta r\Delta x(1+\varepsilon)\,;$$

or Δr est très-petit, on peut donc sans erreur sensible supposer que tous les points de la zone que nous considérons sont distants de r de l'axe des x : ainsi on aura le moment d'inertie de cette zone en multipliant sa masse par r^2, et ce moment sera

$$2\pi\rho r^3\Delta r\Delta x(1+\varepsilon).$$

Le moment d'inertie de l'ensemble des zones qui forment la tranche du solide de révolution comprise entre pm et qn, sera

$$2\pi\Delta x\Sigma\rho r^3\Delta r(1+\varepsilon)\,;$$

or, lorsque l'épaisseur des zones qui forment la tranche devient infiniment petite, la somme

$$\Sigma\rho r^3\Delta r(1+\varepsilon),$$

revient à l'intégrale $\int_0^y \rho r^3 dr$, les limites de r étant $r=o$ et $r=y$ ordonnée de l'élément pq : d'après cela

$$2\pi\Delta x\int_0^y \rho r^3 dr,$$

est le moment d'inertie de la tranche. Si on pose

$$\int_0^y \rho r^3 dr = \mathrm{F}(x),$$

le moment d'inertie sera

$$2\pi \mathrm{F}(x)\,\Delta x,$$

et en passant à la limite, c'est-à-dire en supposant les tranches infiniment minces

$$2\pi \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}(x)dx\,;$$

donc le moment d'inertie du solide de révolution sera

$$k = 2\pi \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \int_0^{\mathrm{Y}} \rho r^3 dr dx\,:$$

mais en admettant que ρ est seulement fonction de x, alors

$$\int_0^{\mathrm{Y}} \rho r^3 dr = \rho \frac{y^4}{4} \quad \text{et} \quad k = \frac{\pi}{2} \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \rho y^4 dx,$$

et comme y est fonction de x, si le solide est homogène, on aura

$$k = \frac{\pi}{2} \rho \int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)^4 dx,$$

formule que l'on pourrait déduire du cas général.

272. Appliquons ce résultat à une sphère dont le cercle générateur a pour équation $x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2$: dans ce cas

$$y^4 = (\mathrm{R}^2 - x^2)^2,$$

et par suite

$$k = \frac{\pi}{2} \rho \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} (\mathrm{R}^2 - x^2)^2 dx = \pi\rho \int_0^{\mathrm{R}} (\mathrm{R}^2 - x^2)\,dx\,:$$

posons pour intégrer $x=\mathrm{R}s$; alors les limites correspondantes à $x=0$, $x=\mathrm{R}$ sont $s=0$, $s=1$, et on a

$$\mathrm{R}^2-x^2=\mathrm{R}^2(1-s^2)\,,\quad dx=\mathrm{R}ds,$$

donc

$$k=\pi\rho\mathrm{R}^5\int_0^1(1-s^2)^2ds=\frac{8}{15}\,\pi\rho\mathrm{R}^5=\frac{2}{5}\,\mathrm{MR}^2,$$

puisque

$$\mathrm{M}=\frac{4}{3}\pi\rho\mathrm{R}^3.$$

273. Si le solide de révolution est un cylindre ayant pour axe l'axe des x, et R pour rayon de sa base; alors $y=\mathrm{R}$ et le moment d'inertie.

$$k=\frac{1}{2}\,\pi\rho\,\mathrm{R}^4\int_{x_0}^{\mathrm{X}}dx\,,$$

et en posant $x_0=0$, $\mathrm{X}=h$ (hauteur du cylindre),

$$k=\frac{1}{2}\,\pi\rho\mathrm{R}^4h=\frac{1}{2}\,\mathrm{MR}^2\,,$$

puisque $\mathrm{M}=\pi\rho\mathrm{R}^2h$.

274. S'il s'agit d'un cône circulaire ayant son sommet à l'origine, pour axe l'axe des x, et R pour rayon de sa base et h pour hauteur ; alors

$$\frac{y}{x}=\frac{\mathrm{R}}{h}\quad\text{ou}\quad y=\frac{\mathrm{R}}{h}\,x,$$

donc

$$k=\frac{1}{2}\,\pi\rho\,\frac{\mathrm{R}^4}{h^4}\int_0^h x^4dx=\frac{1}{10}\,\pi\rho\mathrm{R}^4h=\frac{3}{10}\,\mathrm{MR}^2,$$

puisque

$$\mathrm{M}=\frac{1}{3}\,\pi\mathrm{R}^2h\rho.$$

275. Considérons pour dernière application un paraboloïde de révolution ayant pour équation $y^2 = ax$. Dans ce cas

$$k = \frac{1}{2}\pi\rho a^2 \int_0^h x^2 dx,$$

h étant la hauteur ou sa plus grande abscisse : on tire de là

$$k = \frac{1}{25}\pi\rho a^2 h^3,$$

or, le volume du paraboloïde ayant pour hauteur h est

$$V = \pi \int_0^h y^2 dx = \pi a \int_0^h x dx = \pi \frac{ah^2}{2},$$

donc

$$k = \frac{1}{3} \mathrm{M}ah.$$

§ IV.

Mouvement de rotation d'un corps pesant autour d'un axe horizontal. — Pendule composé.

276. Nous avons vu que la formule générale qui convient au mouvement d'un corps autour d'un axe fixe quelconque est

$$m\omega d\omega + m'\omega' d\omega' + \text{ete.}, = \left\{ P\omega \cos.(P,\omega) + P'\omega' \cos.(P',\omega') + \text{etc.} \right\},$$

ou

(1) $m\omega d\omega + m'\omega' d\omega' + \text{etc.}, = X dx + Y dy + Z dz + X' dx' + \text{etc.}$:

Supposons l'axe des x vertical, celui des y horizontal, et considérons le mouvement d'une masse solide qui tourne autour d'un axe passant par l'origine et per-

pendiculaire au plan xy; cette masse n'étant soumise qu'à l'action de la pesanteur.

Décomposons le corps solide en une infinité de petits corps dont les masses soient m, m', etc., et les coordonnées xyz, $x'y'z'$, etc. : soit de plus r, r', r'', etc., les distances de ces masses à l'axe de rotation, ω, ω', ω'', etc., les vitesses correspondantes, et γ la vitesse angulaire : d'après ces suppositions on a

$$\omega=r\gamma,\ \omega'=r'\gamma',\ \omega''=r''\gamma'',\ \text{etc.},$$

et par suite

$$m\omega^2=mr^2\gamma^2,\ m'\omega'^2=m'r'^2\gamma^2,\ \text{etc.},$$

ajoutant ces égalités membre à membre, et différentiant, il vient

$$m\omega d\omega+m'\omega'd\omega'+\text{etc.},=(mr^2+m'r'^2+\text{etc.},)\,\gamma d\gamma=k\gamma d\gamma,$$

par conséquent

$$k\gamma d\gamma=\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz+\mathrm{X}'dx'+\text{etc.},$$

or, dans le cas qui nous occupe,

$$\mathrm{X}=mg,\ \mathrm{Y}=0,\ \mathrm{Z}=0,\ \mathrm{X}'=m'g,\ \mathrm{Y}'=0,\ \mathrm{Z}'=0,\ \text{etc.}:$$

ainsi l'équation précédente revient à

$$k\gamma d\gamma=g(mdx+m'dx'+\text{etc.}):$$

telle est l'équation du mouvement dont l'intégration fera connaître la variation des forces vives dans un temps donné.

277. Le deuxième membre de cette équation peut se transformer et se simplifier ; en effet, ξ étant l'abscisse du centre de gravité du corps, on a

$$\mathrm{M}\xi=mx+m'x'+\text{etc.},$$

d'où

$$\mathrm{M}d\xi=mdx+m'dx'+\text{etc.},$$

ainsi l'équation se réduit à

$$k\gamma d\gamma = g\,\mathrm{M}d\xi:$$

telle est l'équation simplifiée du mouvement d'un corps solide autour d'un axe horizontal, et l'on voit que ce mouvement a lieu comme si toute la masse était concentrée au centre de gravité : on peut encore lui donner une autre expression, car $k=\Sigma mr^2$; ainsi on peut poser $k=\mathrm{MR}^2$, d'où l'on tire

$$\mathrm{MR}^2\gamma d\gamma = g\mathrm{M}d\xi,$$

et en divisant par M,

$$\mathrm{R}^2\gamma d\gamma = gd\xi, \qquad (2)$$

278. Un corps solide d'une figure quelconque, oscillant autour d'un axe horizontal est nommé *pendule composé* par opposition au *pendule simple*, formé par un seul point matériel suspendu à un fil sans masse. Ainsi l'équation (2) convient parfaitement au pendule composé ; mais pour ramener cette équation aux oscillations du pendule, nommons θ_0 l'angle de la verticale avec la droite qui va de l'origine au centre de gravité de la masse que l'on fait osciller à l'origine du mouvement, et θ l'angle de ces deux lignes, à un instant quelconque du mouvement. L'intégration de l'équation (2) entre les deux instants correspondant à ces deux positions donne

$$\mathrm{R}^2\gamma^2 = 2g(\xi-\xi_0);$$

or si on nomme ρ la longueur du pendule, c'est-à-dire la ligne qui va de l'origine au centre de gravité de la masse, on a

$$\xi=\rho\cos.\theta,\quad \xi_0=\rho\cos.\theta_0,$$

et par suite

$$\mathrm{R}^2\gamma^2 = 2g\rho(\cos.\theta-\cos.\theta_0),\quad = \frac{2g\rho}{\mathrm{R}^2}(\cos.\theta-\cos.\theta_0),$$

et

$$\gamma = \left(\frac{2g\rho}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}} (\cos.\theta - \cos.\theta_0)^{\frac{1}{2}} :$$

de plus s étant l'espace parcouru par le centre de gravité, on a

$$s = \rho(\theta - \theta_0),$$

et par conséquent en différentiant

$$\frac{ds}{dt} = \rho d\left(\frac{\theta_0 - \theta}{dt}\right) = -\rho \frac{d\theta}{dt} :$$

d'un autre côté $\frac{ds}{dt} = \rho\gamma$, et cette égalité combinée avec la précédente donne $\gamma = -\frac{d\theta}{dt}$, et substituant dans la valeur de γ, on obtient

$$\frac{d\theta}{dt} = -\left(\frac{2g\rho}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}} (\cos.\theta - \cos.\theta_0)^{\frac{1}{2}},$$

d'où l'on tire enfin

$$(3)\quad dt = -\left(\frac{R^2}{2g\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\theta}{(\cos.\theta - \cos.\theta_0)^{\frac{1}{2}}} :$$

voilà l'équation cherchée, et qui donne une relation entre le temps d'une oscillation et l'angle que fait avec la verticale la ligne qui va de l'origine ou du point de suspension au centre de gravité de la masse.

279. Comparons maintenant cette équation avec celle obtenue dans le cas du pendule simple. Or, si dans l'équation précédente, on pose $R = \rho$, on tombe sur l'équation cherchée,

$$(4)\quad dt = -\left(\frac{\rho}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\theta}{(\cos.\theta - \cos.\theta_0)^{\frac{1}{2}}}.$$

De plus, si dans l'équation (3) on fait (5) $\frac{R^2}{\rho} = \rho'$, elle devient

$$dt = -\left(\frac{\rho'}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\theta}{(\cos.\theta - \cos.\theta_0)^{\frac{1}{2}}},$$

équation tout à fait semblable à (4) : ainsi, le *pendule composé oscille comme un pendule simple dont la longueur serait* $\frac{R^2}{\rho}$. L'extrémité de cette longueur, dont le mouvement a lieu comme si elle était indépendante des autres points du système, se nomme *centre d'oscillation : il y a évidemment une infinité de centres d'oscillation situés sur une ligne menée parallèlement à l'axe à la distance* ρ', *dans le plan passant par le centre de gravité.*

280. Soit maintenant MR''^2 le moment d'inertie du corps par rapport à un axe passant par le centre de gravité, et parallèle à l'axe de suspension : alors le moment d'inertie

$$k = MR^2 = MR''^2 = M\rho^2,$$

d'après ce qui a été démontré, et par suite $R^2 = R''^2 + \rho^2$: substituant cette valeur de R^2 dans (5), il vient

$$\rho' = \frac{R''^2}{\rho} + \rho,$$

ou

$$\frac{R''^2}{\rho} = \rho' - \rho = \rho_1,$$

ou enfin $R''^2 = \rho\rho_1$, ρ_1 est la distance du centre de gravité au centre d'oscillation. R''^2 étant indépendant de la position du centre de suspension, le produit $\rho\rho_1$ en est aussi indépendant, et il en résulte que si l'on donne

à ρ la valeur de $\rho_{\prime}$, $\rho_{\prime}$ prendra celle de ρ, c'est en cela que consiste la *réciprocité des centres de suspension et d'oscillation.*

281. Il existe d'ailleurs dans un corps solide une infinité de lignes telles qu'en les prenant pour axes de suspension, ce corps fera constamment autour de ces lignes des oscillations dont les durées seront toujours égales entre elles. Désignons par α, β, γ, les angles que forme avec les trois axes principaux qui se croisent au centre de gravité du corps, une parallèle à l'axe fixe menée par ce centre de gravité, et par A,B,C les moments d'inertie pris par rapport à ces axes principaux. On aura

$$Mk^2 = A\cos.^2\alpha + B\cos.^2\beta + C\cos.^2\gamma,$$

et par conséquent

$$\frac{A\cos.^2\alpha + B\cos.^2\beta + C\cos.^2\gamma + M\rho^2}{M\rho},$$

pour la longueur du pendule simple dont les oscillations auraient une durée égale à celle du corps proposé. Or on peut faire varier d'une infinité de manières les valeurs des quantités α, β, γ et ρ, en conservant toujours la même valeur à l'expression précédente.

Soit A le plus petit des trois moments d'inertie A,B,C à valeur égale pour ρ, la plus petite valeur de l'expression précédente sera $\frac{A+M\rho}{M\rho}$, et le minimum de cette dernière expression répond à la valeur $\rho = \sqrt{\frac{A}{M}}$: ainsi les axes de suspension autour desquels un corps solide exécute les oscillations dont la durée

est la moindre possible, sont parallèles à celui des axes principaux passant par le centre de gravité auquel répond le plus petit des trois moments d'inertie, et sont distants de cet axe principal de la quantité $\sqrt{\frac{A}{M}}$: la longueur du pendule simple dont les oscillations ont cette moindre durée est $2\sqrt{\frac{A}{M}}$.

Du reste il est facile de voir que *si dans le plan mené par le centre de gravité perpendiculairement à l'axe de rotation, on trace du centre de gravité deux cercles avec les rayons* ρ, ρ_1 *le premier sera la base d'un cylindre droit dont les génératrices sont des axes de suspension synchrones, et l'autre le lieu des centres d'oscillation correspondants, et réciproquement.* (Théorème d'Huyghens.) En changeant la direction de l'axe de rotation, on trouve un autre système d'axes, en sorte que ces différents systèmes seront tangents à deux sphères concentriques autour du centre de gravité : ainsi, *dans tout corps solide il existe une infinité d'axes autour desquels les oscillations sont synchrones*, ce que nous avons déjà démontré.

282. Nous avons vu que le pendule composé se ramène à un pendule simple ; ainsi, en supposant les oscillations très-petites, l'équation relative sera

$$2T = \pi \left(\frac{\rho'}{g}\right)^{\frac{1}{2}} :$$

voyons maintenant comment cette équation peut servir à déterminer la quantité g : on peut compter le temps qu'emploie à faire une demi-oscillation le pendule dont on mesurera la ligne ρ', c'est-à-dire la distance du

centre d'oscillation au centre de suspension, ainsi tout est connu dans cette formule, on en tire

$$\left(\frac{2T}{\pi}\right)^2 = \frac{\rho'}{g}, \quad \text{donc } g = \rho' \frac{\pi^2}{(2T)^2};$$

Le temps d'une demi-oscillation s'obtient en divisant le temps employé à faire un certain nombre de demi-oscillations par ce nombre. A Paris, on a trouvé pour le pendule qui fait ses demi-oscillations dans une seconde $\rho' = 0^m,99384$: ainsi

$$g = 0^m,99384\,(3,14159)^2,$$

d'où $g = 9^m,8088$. Donc l'*espace parcouru par un corps pesant pendant la première seconde de sa chute est* 4,9044.

CHAPITRE VII.

MOUVEMENT D'UN SYSTÈME INVARIABLE AUTOUR D'UN POINT FIXE.

—

§ Ier.

Propriétés du mouvement d'un système invariable entièrement libre : axe instantané de rotation.

283. Si plusieurs points matériels, invariablement liés entre eux, se meuvent dans un plan, et si les vitesses de deux de ces points deviennent nulles à un instant déterminé du mouvement, les vitesses de tous les autres points seront nulles.



Fig. 82. En effet, soient A, A', A'' trois points du système, et A, A' ceux dont les vitesses sont nulles ; appliquons en A'' une force quelconque P, et décomposons cette force en deux autres Q, Q' dirigées suivant AA'' et $A''A'$: nous pouvons considérer ces deux forces comme appliquées en A et A' : dès lors il y a deux systèmes P et Q, Q' de forces équivalentes et en vertu du principe de *Dalembert*, si $\omega, \omega', \omega''$ sont les vitesses des trois points, on aura l'équation

$$P\omega'' \cos.(P,\omega'') = Q\omega \cos.(Q,\omega) + Q'\omega' \cos.(Q',\omega'),$$

Si $\omega, \omega' \omega''$ sont des vitesses virtuelles, on peut les considérer comme telles, puisqu'elles sont compatibles avec les liaisons du système : les vitesses ω, ω' étant nulles, l'équation précédente se réduit à

$$P\omega'' \cos.(P,\omega'') = o \text{ ou } \omega'' = o,$$

puisque la force P est arbitraire en intensité et en direction. Ce que nous venons de dire du point A'', s'appliquant à tout autre, le principe est démontré.

Nous allons démontrer maintenant que, si seulement la vitesse d'un point devient nulle à un instant du mouvement, la vitesse de chacun des autres points est perpendiculaire et proportionnelle à la ligne menée du point en repos à celui dont il s'agit.

Fig. 83. Soit A le point en repos et A' un autre point quelconque du système. Appliquons en A une force quelconque P dirigée suivant AA', cette force pourra être considérée comme appliquée en A', et produira le même effet. Si donc nous représentons par ω, ω' les vitesses des points A, A', nous aurons, en exprimant

que le système P appliqué en A′ est équivalent au système P appliqué en A,

$$P\omega \cos. (P,\omega) = P\omega' \cos. (P',\omega')$$

et comme $\omega = 0$, il en résulte

$$P\omega' \cos. (P,\omega') = o. \quad \text{ou bien} \quad \cos. (P,\omega') = o,$$

puisque nous supposons qu'on n'a pas $\omega' = 0$; donc la vitesse ω' est perpendiculaire au rayon vecteur qui joint le point A au point A′, et la première partie du principe est démontrée.

Soit toujours A le point dont la vitesse est nulle, et A′,A″ deux autres points quelconques. Appliquons sur le rayon vecteur AA′ considéré comme bras de levier, un couple dont les forces soient dirigées suivant les vitesses des points A,A′; appliquons de même sur AA″ un autre couple dont le moment soit équivalent au premier; en nommant r',r'' les bras de levier, AA′,AA″, Q,Q′ les forces des couples, on aura d'abord (1) $Qr' = Q'r''$; or, ces deux couples forment des systèmes équivalents, ainsi pour les vitesses virtuelles quelconques et par suite pour les vitesses effectives du système, qui sont aussi virtuelles, on aura Fig. 84.

$$Q\omega' \cos. (Q',\omega') = Q'\omega'' \cos. (Q',\omega''),$$

or

$$\cos. (Q,\omega') = \cos. (Q',\omega'') = 1;$$

donc $Q\omega' = Q'\omega''$, et divisant cette équation par (1), il vient $\frac{\omega'}{r'} = \frac{\omega''}{r''}$, ce qui établit la deuxième partie du principe.

Passons maintenant au cas de plusieurs points ma-

Fig. 85. tériels invariablement liés entre eux, et qui se meuvent dans l'espace. On démontrera, avec la même facilité que dans le cas d'un système plan, lorsque les vitesses de trois points deviennent nulles à un instant du mouvement, il en est de même des vitesses de tous les autres points ; car, en décomposant une force quelconque P, appliquée en A''' en trois autres Q,Q',Q'', on aura

$$P\omega''' \cos. (P,\omega''') = Q\omega \cos. (Q,\omega) + Q'\omega' \cos. (Q',\omega') + Q''\omega'' \cos. (Q'',\omega''),$$

équation qui se réduit à $\omega'''=0$.

Lorsque la vitesse d'un seul point devient nulle, la vitesse de chacun des autres points est perpendiculaire au rayon vecteur correspondant.

Cela est évident, car chaque point décrira une courbe sphérique autour du point dont la vitesse est nulle, et sa propre vitesse sera dirigée suivant la tangente à cette courbe, et sera par conséquent perpendiculaire au rayon vecteur qui est le rayon de cette sphère. On pourrait d'ailleurs le démontrer comme dans le cas du plan.

284. Lorsqu'un système invariable se meut autour d'un point fixe instantanément, ce qui a lieu dans le cas précédent, on peut toujours mener par ce point un axe autour duquel on peut considérer le mouvement comme s'effectuant.

Fig. 86. Soit O le point dont la vitesse est nulle, et A,A' deux points quelconques du système, menons par ces points des plans perpendiculaires à leurs vitesses ; ces plans se couperont suivant une droite OD, qui passera nécessairement par le point O, et nous allons démontrer

qu'un point quelconque de cette droite a aussi une vitesse nulle.

En effet, menons les lignes DA, DA′ et dans le plan ADA′, appliquons en D une force P, que nous décomposerons en deux autres Q, Q′, dirigées suivant DA et DA′, le système P sera équivalent au système Q, Q′, donc en appelant Ω la vitesse du point D, et ω, ω' celles de A, A′, on aura

$$P\Omega \cos.(P,\Omega) = Q\omega \cos.(Q,\omega) + Q'\omega' \cos.(Q',\omega')$$

pour des vitesses virtuelles quelconques, et par suite pour les vitesses effectives. Or, le deuxième membre de cette équation est nul, car $\cos.(Q,\omega) = o$, $\cos.(Q',\omega') = o$, donc $P\Omega \cos.(P,\Omega) = o$, ce qui revient à $\Omega = o$, puisque P est quelconque, si l'angle (P,Ω) ne peut pas être droit : or, c'est ce qui arrive, car P étant dans le plan ADA′, il faudrait que OD fût parallèle à P, ce qui est impossible, puisque OD rencontre le plan de P, et ne peut se trouver dans ce plan. On pourra donc considérer le mouvement comme s'effectuant autour de l'axe OD; cet axe qui change à chaque instant se nomme l'*axe instantané de rotation*.

285. Il nous reste à faire voir que les vitesses des points sont proportionnelles aux distances de ces points à l'axe instantané de rotation.

Soit toujours O le point dont la vitesse est nulle, et OD l'axe instantané de rotation. Abaissons sur OD les perpendiculaires AE, A′E′, de deux points quelconques du système, et sur ces perpendiculaires comme bras de levier, appliquons des couples dont les forces soient dirigées suivant les vitesses et dont les mouvements soient égaux : et d'abord il est nécessaire d'observer Fig. 87.

que la ligne OD sera la commune intersection de tous les plans passant par les points du système, et perpendiculaires aux vitesses de ces derniers, car si tous ces plans ne se coupaient pas suivant une même ligne droite, il y aurait dans le système trois points non en ligne droite, dont les vitesses seraient nulles, ce qui entraverait l'état de repos de tous les autres points. Cela entendu, il est évident que les deux couples formeront deux systèmes équivalents. En exprimant cette condition au moyen du principe de d'Alembert, et remarquant que les forces appliquées à l'axe OD ne produisent aucun effet, on aura l'équation

$$P\omega \cos.(P,\omega) = P'\omega' \cos.(P',\omega');$$

or, les forces étant dirigées suivant les vitesses,

$$\cos.(P,\omega) = \cos.(P'\omega') = 1.$$

ainsi, $P\omega = P'\omega'$, d'ailleurs l'égalité des mouvements des couples donne $Pr = P'r'$, et ces deux équations divisées l'une par l'autre produisent $\frac{\omega}{r} = \frac{\omega'}{\omega'}$, ce qu'il fallait démontrer.

Ces principes généraux étant posés, nous allons chercher les équations qui déterminent le mouvement d'un système invariable autour d'un point fixe.

§ II.

Équations du mouvement d'un système invariable autour d'un point fixe.

286. Ce qui précède étant bien établi, supposons que des forces motrices données agissent sur tous les

éléments du système ou du mobile, et cherchons, eu égard à ces forces, les équations différentielles de son mouvement autour d'un point fixe.

Par le centre fixe, menons une droite parallèle à la direction du moment linéaire principal de la quantité de mouvement, prenons cette droite pour axe des x, et pour axes des y et des z, deux droites quelconques perpendiculaires entre elles, et passant par le centre fixe pris pour origine des coordonnées, dans un plan perpendiculaire à l'axe des x ; traçons ensuite les trois axes principaux du système invariable et relatif au centre fixe : en nommant x,y,z les coordonnées d'un point dont la masse est m et x_1, y_1, z_1, celles relatives aux trois axes principaux, on aura

$$(1)\quad D=\Sigma m y_1 z_1=o,\ E=\Sigma m x_1 z_1=o,\ F=\Sigma m x_1 y_1=o.$$

Pour avoir les équations du mouvement nous projetterons successivement sur l'axe invariable des x, 1° le rayon vecteur qui va de l'origine au point dont la masse est m ; 2° la vitesse de ce point ; 3° le moment linéaire de cette vitesse : nous chercherons deux expressions de ces projections, et nous aurons un nombre suffisant d'équations.

Soit r le rayon vecteur correspondant au point dont il s'agit, il sera déterminé par

$$(2)\quad r^2=x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2,$$

et il aura pour cosinus de son angle avec l'axe des x $\frac{x}{r}$; cherchons une autre expression de ce cosinus.

λ,μ,ν étant les angles de l'axe instantané de rotation avec les axes principaux, et Γ la vitesse angulaire du système autour de l'axe, $\Gamma\cos.\lambda$, $\Gamma\cos.\mu$, $\Gamma\cos.\nu$ se-

ront les projections de cette vitesse sur les axes principaux, désignées par u, v, w. Ainsi

$$(3)\quad wy_1 - vz_1,\ uz_1 - wx_1,\ vx_1 - uy_1$$

représenteront les projections du moment linéaire de la vitesse angulaire sur les axes principaux, et, en vertu de ce qui a été démontré, celles de la vitesse ω sur les mêmes axes : d'après cela les projections algébriques du moment linéaire de la quantité du mouvement seront

$$-um(y_1^2+z_1^2)+vmx_1y_1+wmz_1x_1,\ -um(x_1^2+y_1^2) \text{ etc.}$$

donc les projections du moment linéaire principal de la quantité du mouvement sur les axes seront, en ayant égard à (1)

$$-u\Sigma m(y_1^2+z_1^2) = -\mathrm{A}u \text{ sur l'axe des } x.$$
$$-v\Sigma m(z_1^2+x_1^2) = -\mathrm{B}v \text{ sur l'axe des } y.$$
$$-w\Sigma m(x_1^2+y_1^2) = -\mathrm{C}w \text{ sur l'axe des } z.$$

Cela posé, et χ représentant le moment linéaire principal de la quantité de mouvement, on aura pour les cosinus des angles du moment linéaire principal ou de l'axe invariable avec les axes principaux

$$(4)\quad -\frac{\mathrm{A}u}{\chi},\ -\frac{\mathrm{B}v}{\chi},\ -\frac{\mathrm{C}w}{\chi};\ \text{or } \frac{x_1}{r}, \frac{y_1}{r}, \frac{z_1}{r}$$

sont les cosinus des angles du rayon vecteur avec les axes principaux, par conséquent le cosinus de l'angle du rayon vecteur avec l'axe invariable des x, sera

$$-\frac{\mathrm{A}ux_1+\mathrm{B}vy_1+\mathrm{C}wz_1}{r\chi}$$

et comme $\frac{x}{r}$ est une première expression de ce cosinus, il en résulte, en égalant ces deux expressions, que la projection du rayon vecteur sur l'axe invariable, est

$$(5)\quad x = -\frac{1}{\lambda}(\mathrm{A}ux_1 + \mathrm{B}vy_1 + \mathrm{C}wz_1).$$

Cherchons maintenant la projection de la vitesse ω sur l'axe invariable.

Or, en vertu de (3) les cosinus des angles de la vitesse avec les axes principaux sont :

$$\frac{wy_1 - vz_1}{\omega},\ \frac{uz_1 - wx_1}{\omega},\ \frac{vx_1 - uy_1}{\omega},$$

et les expressions (4) sont ceux de l'axe invariable avec les axes principaux. Il résulte de là, pour le cosinus de la vitesse avec l'axe invariable :

$$-\frac{1}{\cos.\lambda}\left\{(\mathrm{C}-\mathrm{B})\,vwx_1 + (\mathrm{A}-\mathrm{C})\,wuy_1 + (\mathrm{B}-\mathrm{A})uvz_1\right\}$$

cosinus qui a aussi pour expression $\frac{1}{\omega}\frac{dx}{dt}$; ainsi la projection de la vitesse sur l'axe invariable est

$$(6)\quad \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\lambda}\left\{(\mathrm{C}-\mathrm{B})\,vwx_1 + (\mathrm{A}-\mathrm{C})\,wuy_1 + (\mathrm{B}-\mathrm{A})\,uvz_1\right\}.$$

Cherchons enfin la projection du moment linéaire principal de la vitesse sur l'axe invariable.

Les cosinus des angles du moment linéaire de la vitesse avec les axes principaux, sont

$$-\frac{u(y_1^2+z_1^2)+vx_1y_1+wz_1x_1}{r\omega},\ -\frac{v(z_1^2+x_1^2)+wz_1y_1+ux_1y_1}{r\omega},$$
$$-\frac{w(x_1^2+y_1^2)+ux_1z_1+wy_1z_1}{r\omega}$$

et par suite le cosinus de l'angle du moment linéaire de la vitesse avec l'axe fixe, a pour expression

$$\frac{1}{r\omega\lambda}\Big\{Au^2(y_1^2+z_1^2)+Bv^2(z_1^2+x_1^2)+Cw^2(x_1^2+y_1^2)$$
$$-(B+C)vwy_1z_1-(C+A)wuz_1x_1-(A+B)uvx_1y_1\Big\};$$

or

$$\frac{Y\dfrac{dz}{dt}-Z\dfrac{dy}{dt}}{r\omega}$$

est aussi une autre expression du même cosinus, donc

$$(7)\quad Y\frac{dz}{dt}-Z\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\lambda}\Big\{Au^2(y_1^2+z_1^2)+Bv^2(z_1^2+x_1^2)$$
$$+Cw^2(x_1^2+y_1^2)-(B+C)vwy_1z_1-(C+A)vuz_1x_1$$
$$-(A+B)uvx_1y_1\Big\};$$

les trois équations (5), (6), (7), vont nous suffire pour déterminer le mouvement du système.

En effet, les équations

$$u=\gamma\cos.\lambda,\ v=\gamma\cos.\mu,\ w=\gamma\cos.\nu,$$

nous serviront à obtenir γ,λ,μ,ν, c'est-à-dire la vitesse angulaire et la position de l'axe instantané de rotation, lorsque u,v,w seront eux-mêmes connus.

Ces trois quantités u,v,w, s'obtiendraient en remarquant que si l'on différentie (5), on aura avec (6) deux valeurs qui, égalées entre elles, produiront

$$A\frac{du}{dt}x_1+B\frac{dv}{dt}y_1+C\frac{dw}{dt}z_1=(C-B)vwx_1+(A-C)wuy_1$$
$$+(B-A)uvz_1$$

équation qui, devant avoir lieu quels que soient x_1,y_1,z_1, donnera les trois suivantes :

$$A\frac{du}{dt}=(C-B)vw, B\frac{dv}{dt}=(A-C)wu, C\frac{dw}{dt}=(B-A)uv.$$

Maintenant, pour déterminer les trois coordonnées x,y,z, on aura 1° l'équation (5); 2° l'équation $x^2+y^2+z^2=r^2$; 3° l'équation (7), que l'on peut mettre sous la forme suivante, en remarquant que le deuxième membre sera une fonction T du temps,

$$\frac{ydz-zdy}{y^2+z^2}=\frac{T}{r^2-x^2}dt;$$

d'où l'on déduira

$$\text{arc tang.}\frac{z}{y}-\text{arc tang.}\frac{z_0}{y_0}=\int_0^t\frac{T}{r^2-x^2}dt,$$

ainsi, le mouvement du système n'aura plus rien d'indéterminé, puisqu'en donnant une deuxième valeur à x,y,z, on aura la position d'un deuxième point. La connaissance de deux points complétera avec le point fixe la détermination du système.

Il nous reste à examiner comment on intégrera les équations (A)

$$(1)\ A\frac{du}{dt}=(C-B)vw,\quad (2)\ B\frac{dv}{dt}=(A-C)wu,$$

$$(3)\ C\frac{dw}{dt}=(B-A)vu.$$

Il est très-facile de trouver deux intégrales de ces équations lorsqu'il n'y a pas de forces appliquées au système.

En effet, multiplions la première de ces équations par u, la deuxième par v, et la troisième par w, puis, ajoutons ces équations membre à membre, alors le

deuxième membre deviendra nul, et il en résultera :

$$\mathrm{A}u\,du + \mathrm{B}v\,dv + \mathrm{C}w\,dw = o,$$

équation que l'on peut écrire ainsi :

$$d(\mathrm{A}u^2 + \mathrm{B}v^2 + \mathrm{C}w^2) = o,$$

d'où

$$\mathrm{A}u^2 + \mathrm{B}v^2 + \mathrm{C}w^2 = \text{const.};$$

or, le premier membre est le carré de la somme des forces vives, représentée par ψ ; cette somme est constante lorsqu'il n'y a pas de forces appliquées au système; on aura donc

$$(4)\quad \mathrm{A}u^2 + \mathrm{B}v^2 + \mathrm{C}w^2 = \psi^2,$$

équation que nous avions déjà établie; voilà une première intégrale des équations ci-dessus; passons à la deuxième : pour cela, multiplions la première des équations (A) par Au, la deuxième par Bv, la troisième par Cw, alors le deuxième membre deviendra

$$\mathrm{A}(\mathrm{C}-\mathrm{B}) + \mathrm{B}(\mathrm{A}-\mathrm{C}) + \mathrm{C}(\mathrm{B}-\mathrm{A}),$$

quantité nulle, et il restera

$$\mathrm{A}^2u\,du + \mathrm{B}^2v\,dv + \mathrm{C}^2w\,dw = o$$

ou

$$d(\mathrm{A}^2u^2 + \mathrm{B}^2v^2 + \mathrm{C}^2w^2) = o,$$

ou

$$\mathrm{A}^2u^2 + \mathrm{B}^2v^2 + \mathrm{C}^2w^2 = \text{const.};$$

or, le premier membre est le carré du moment linéaire principal relatif aux quantités de mouvement. Nous avons représenté ce mouvement par χ, il est constant lorsqu'il n'y a pas de forces appliquées au système; on a donc :

$$(5)\quad \mathrm{A}^2u^2 + \mathrm{B}^2v^2 + \mathrm{C}^2w^2 = \chi^2,$$

équation déjà établie, voilà une deuxième intégrale des équations proposées.

Au moyen des équations (4) et (5), on déterminera v, w en fonction de u, en substituant ces valeurs dans (1), on tirera une équation de la forme

$$(6)\quad dt = \frac{A du}{(C-B) vw},$$

où les variables sont séparées.

On peut opérer d'une autre manière pour arriver à cette troisième équation, en introduisant γ à la place de u, v, w, d'après la remarque que l'on a

$$(7)\quad u^2 + v^2 + w^2 = \gamma^2.$$

En effet les équations (1) (2) (3) peuvent s'écrire ainsi :

$$(B)\ \left\{ \frac{du}{dt} = \left(\frac{C-B}{A}\right) vw, \frac{dv}{dt} = \frac{A-C}{B} wu, \frac{dw}{dt} = \frac{B-A}{C} vu; \right.$$

multiplions la première par u, la seconde par v, la troisième par w, et ajoutons les produits, il viendra :

$$\frac{udu}{dt} + \frac{vdv}{dt} + \frac{wdw}{dt} = \left(\frac{C-B}{A} + \frac{A-C}{B} + \frac{B-A}{C}\right) uvw;$$

or la différentiation de (7) donne

$$\frac{udu}{dt} + \frac{vdv}{dt} + \frac{wdw}{dt} = \gamma d\gamma;$$

donc on aura :

$$\frac{1}{2}\frac{d(\gamma^2)}{dt} = \left(\frac{C-B}{A} + \frac{A-C}{B} + \frac{B-A}{C}\right) uvw$$

$$= \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2 - B^2C - C^2A - A^2B}{ABC} uvw$$

$$= \frac{(A-B)(B-C)(C-A)}{ABC} uvw;$$

d'où l'on déduit ;

$$(8)\quad dt = \frac{\frac{1}{2} d(\gamma^2)\,ABC}{(A-B)(B-C)(C-A)} uvw$$

il reste encore à exprimer le dénominateur en fonction de γ, ce à quoi l'on parviendra facilement en observant que les trois équations

$$(9)\quad u^2+v^2+w^2=\gamma^2,\; Au^2+Bv^2+Cw^2 =\psi^2,\; A^2u^2+B^2v^2+C^2w^2=\chi^2$$

ont des coefficients en progression géométrique ; nous avons l'équation :

$$(x-B)(x-C)=x^2-(B+C)\,x+BC;$$

pour x=A, il vient :

$$(A-B)(A-C)=A^2-(B+C)\,A+BC;$$

pour x=B, ou x=C, les deuxièmes membres deviennent nuls, et il reste :

$$(B-B)(B-C)=B^2-(B+C)\,B+BC=o,$$
$$(C-B)(C-C)=C^2+(B+C)\,C+BC=o,$$

ce qui montre que si l'on multiplie la deuxième des équations ci-dessus par $-(B+C)$, la première par BC, et que l'on ajoute ces trois équations ainsi modifiées, v^2 et w^2 se trouveront éliminés, et nous aurons :

$$(10)\quad (A-B)(A-C)\,u^2=\chi^2-(B+C)\,\psi^2+BC\,\gamma^2.$$

On trouverait de même

$$(11)\quad (B-A\,(B-C)\,v^2=\chi^2-(C+A)\,\psi^2+CA\gamma^2,$$
$$(12)\quad (C-A)(C-B)\,w^2=\chi^2-(A+B)\,\psi^2+AB\gamma^2:$$

or, en multipliant ensemble les trois équations (10),

(11), (12), et ajoutant, nous obtiendrons le carré du dénominateur cherché de (8), et alors il viendra

$$dt=\frac{\frac{1}{2}\,ABCd(\gamma^2)}{\sqrt{\left[\{(B+C)\psi^2-\chi^2-BC\gamma^2\}\{(C+A)\psi^2-\chi^2-AC\gamma^2\}\{(A+B)\psi^2-\chi^2-AB\gamma^2\}\right]}},$$

équation dans laquelle les variables sont encore séparées, et par conséquent intégrables.

Dans le cas particulier où deux moments d'inertie sont égaux, il est facile d'opérer l'intégration. Supposons, par exemple, B=C, alors les équations (B) deviennent

$$\frac{du}{dt}=0,\quad B\frac{dv}{dt}=(A-B)\,uw,\quad B\frac{dw}{dt}=(B-A)\,uv;$$

de la première on tire $u=u_0$ (u_0 étant une quantité constante), et les deux autres reviennent à

$$\frac{dv}{dt}=\left(\frac{A}{B}-1\right)u_0w,\quad \frac{dw}{dt}=\left(1-\frac{A}{B}\right)u_0v,$$

équations que l'on peut intégrer par la méthode des coefficients indéterminés : en effet, multiplions la deuxième par θ et ajoutons, il vient :

$$d\left(v+\frac{\theta w}{dt}\right)=\left(\frac{A}{B}-1\right)u_0(w-\theta v)=\left(1-\frac{A}{B}\right)\theta u_0\left(v-\frac{1}{\theta}w\right),$$

Posons maintenant

$$v+\theta w=\left(v-\frac{1}{\theta}w\right),$$

ce qui donne

$$\theta=-\frac{1}{\theta},\quad \theta=\pm\sqrt{-1},$$

il suffit d'employer une seule de ces valeurs pour obtenir v et w, puisque cette valeur de θ est imaginaire.

D'après cette supposition, l'équation précédente se change en la suivante :

$$d\frac{(\nu+\theta w)}{dt}=\left(1-\frac{\text{A}}{\text{B}}\right)\theta u_o(\nu+\theta w),\ \left(1-\frac{\text{A}}{\text{B}}\right)\theta u_o dt=d\frac{(\nu+\theta w)}{\nu+\theta w},$$

d'où en intégrant

$$l\frac{(\nu+\theta w)}{\nu_o+\theta w_o}=\left(1-\frac{\text{A}}{\text{B}}\right)\theta u_o t,$$

ou bien en passant aux nombres

$$\nu+\theta w=\nu_o+\theta w_o e^{\left(1-\frac{\text{A}}{\text{B}}\right)\theta u_o t},$$

et en remplaçant θ par sa valeur $\sqrt{-1}$,

$$\nu+w\sqrt{-1}=(\nu_o+w_o\sqrt{-1})e^{\left(1-\frac{\text{A}}{\text{B}}\right)u_o t\sqrt{-1}}$$

$$=(\nu_o+w_o\sqrt{-1})\left\{\cos.\left(1-\frac{\text{A}}{\text{B}}\right)u_o t+\sin.\left(1-\frac{\text{A}}{\text{B}}\right)u_o t\sqrt{-1}\right\},$$

$$\nu=\nu_o\cos.\left(1-\frac{\text{A}}{\text{B}}\right)u_o t-w_o\sin.\left(1-\frac{\text{A}}{\text{B}}\right)u_o t,$$

$$w=\nu_o\sin\left(1-\frac{\text{A}}{\text{B}}\right)u_o t+w_o\cos.\left(1-\frac{\text{A}}{\text{B}}\right)u_o t.$$

Ainsi, u,ν,w sont déterminés, et il sera facile d'en déduire les valeurs de x,y,z—, comme nous l'avons déjà dit précédemment.

La recherche ou la détermination de x,y,z se simplifie lorsqu'il s'agit d'un point situé sur un des axes principaux. Considérons, par exemple, le point dont les coordonnées, par rapport aux axes principaux, sont $x_1=1, y_1=o, z_1=o$: alors les trois équations qui déterminent x,y,z deviennent

$$(1)\quad x=-\frac{Au}{\chi},\quad (2)\quad y^2+z^2=1-\frac{A^2u^2}{\chi^2},$$

$$(3)\quad \chi\left(\frac{ydz}{dt}-\frac{zdy}{dt}\right)=Bv^2+Cw^2.$$

De ces deux dernières, nous allons tirer les valeurs de y et z, les équations (2) et (3) reviennent à

$$(4)\quad y^2+z^2=\frac{\chi^2-A^2u^2}{\chi^2},\quad \chi\left(\frac{ydz}{dt}-\frac{zdy}{dt}\right)=\psi^2-A^2u,$$

divisant l'un par l'autre

$$\frac{ydz-zdy}{y^2+z^2}=\chi\frac{\psi^2-Au^2}{\chi^2-A^2u^2}\,dt,$$

d'où en intégrant

$$(5)\quad \text{arc tang.}\frac{z}{y}-\text{arc tang.}\frac{z_0}{y_0}=\chi\int_0^t\frac{\psi^2-Au^2}{\chi^2-A^2u^2}\,dt,$$

et cette équation, jointe à (1) et (4), complétera la détermination dont il s'agit.

L'équation (5) est immédiatement intégrable lorsque $\chi^2=A\psi^2$; car alors

$$\text{arc tang.}\frac{z}{y}-\text{arc tang.}\frac{z_0}{y_0}=\frac{\chi}{A}\,t,$$

ce qui montre que l'angle que fait avec l'axe des y la projection du rayon vecteur sur le plan zy, croît proportionnellement au temps. Dans ce cas, l'axe principal des x, s'approche indéfiniment de l'axe invariable.

287. Examinons le cas particulier où le solide est un ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1:$$

le moment d'inertie principal est

$$K = M\frac{(a^2 \sin.^2\lambda + b^2 \sin.^2\mu + c^2 \sin.^2\nu)}{s},$$

et les moments d'inertie relatifs aux axes principaux de l'ellipsoïde qui coïncident avec ses axes, sont :

$$A = M\frac{b^2+c^2}{s},\quad B = M\frac{c^2+a^2}{s},\quad C = M\frac{a^2+b^2}{s},$$

en remplaçant dans les calculs précédents A,B,C par ces valeurs on aura les équations du mouvement de l'ellipsoïde autour de son centre.

Si, en outre, l'ellipsoïde est de révolution, les équations ci-dessus se réduisent à

$$A = \frac{2}{s}Mb^2,\quad B = C = M\frac{a^2+b^2}{s}:$$

alors u,v,w seront donnés par les équations

$$u = u_0,\quad v + w\sqrt{-1} = e^{\left(1-\frac{A}{B}\right)u_0 t\sqrt{-1}}(v_0 + w_0\sqrt{-1}),$$

et cette dernière deviendra

$$v + w\sqrt{-1} = e^{\left(1-\frac{2b^2}{a^2+b^2}\right)u_0 t\sqrt{-1}}(v_0 + w_0\sqrt{-1})$$
$$= e^{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)u_0 t\sqrt{-1}}(v_0 + w_0\sqrt{-1}),$$

d'où l'on tire

$$v = v_0 \cos.\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)u_0 t - w_0 \sin.\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)u_0 t,$$
$$w = v_0 \sin.\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)v_0 t + w_0 \cos.\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)u_0 t.$$

§ III.

Propriétés de l'axe instantané de rotation.

288. Revenons à l'axe instantané de rotation dont nous avons reconnu l'existence, et examinons dans quelles circonstances il devient fixe dans le corps ou mobile en mouvement.

Pour que cette fixité ait lieu, il faut que les angles λ, μ, ν qu'il fait avec les axes principaux soient constants, et par suite toujours égaux à leurs valeurs initiales λ_0, μ_0, ν_0 ; et comme d'ailleurs

$$u = \gamma \cos.\lambda, \quad v = \gamma \cos.\mu, \quad w = \gamma \cos.\nu, \quad u_0 = \gamma_0 \cos.\lambda_0,$$
$$v_0 = \gamma_0 \cos.\mu_0, \quad w_0 = \gamma_0 \cos.\nu_0;$$

cette condition revient aux égalités

$$\frac{u}{u_0} = \frac{v}{v_0} = \frac{w}{w_0} = \frac{\gamma}{\gamma_0},$$

desquelles on tire

$$\frac{u^2}{u_0^2} = \frac{v^2}{v_0^2} = \frac{w^2}{w_0^2} = \frac{Au^2 + Bv^2 + Cw^2}{Au_0^2 + Bv_0^2 + Cw_0^2},$$

et par suite

$$\frac{u}{u_0} = \frac{v}{v_0} = \frac{w}{w_0} = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{Au^2 + Bv^2 + Cw^2}}{\sqrt{Au_0^2 + Bv_0^2 + Cw_0^2}};$$

le numérateur de cette fraction représente la force vive, et le dénominateur la force vive initiale; or, cette force vive est constante ; par conséquent

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = 1, \quad \text{ou} \quad \gamma = \gamma_0,$$

d'où il résulte que, *pour que l'axe instantané de*

rotation devienne fixe dans le corps, il faut que la vitesse angulaire soit constante; et dans ce cas l'axe instantané de rotation est aussi fixe dans l'espace; car l'égalité $\omega=\gamma r$ exige que ω soit elle-même constante.

289. Il est encore facile de démontrer que *lorsque l'axe instantané de rotation est fixe dans le corps et par suite dans l'espace, il est dirigé suivant l'un des axes principaux.*

En effet u, v, w étant des quantités constantes, les équations (α) deviennent

$$(C-B)vw=0, \quad (A-C)wu=0, \quad (B-A)uv=0;$$

ces équations peuvent être satisfaites de plusieurs manières : d'abord par la condition $C=B=A$, auquel cas les trois moments d'inertie par rapport aux axes principaux étant égaux, une ligne quelconque menée par l'origine est un axe principal; ainsi, l'axe instantané est lui-même un axe principal; 2° par les conditions $B=C$ et $u=o$; or, en vertu de $u=o$, on a

$$\cos.\lambda=0 \quad \text{ou} \quad \lambda=\frac{\pi}{2},$$

ce qui montre que l'axe instantané est situé dans le plan des yz, et, de plus, en vertu de $B=C$, les deux moments d'inertie par rapport aux deux axes principaux situés dans ce plan étant égaux, un axe quelconque tiré dans ce plan par l'origine est un axe principal; donc, encore ici l'axe instantané coïncide avec un axe principal; 3° par les conditions $B=C, w=o, v=o$; alors

$$\cos.\mu=0, \ \cos.\nu=0 \quad \text{ou} \quad \mu=\nu=\frac{\pi}{2},$$

l'axe instantané coïncide avec l'axe principal des x:

lès raisonnements seraient les mêmes en admettant les hypothèses

$$(A = C,\ v = 0) \quad \text{ou} \quad (A = C,\ u = 0,\ w = 0),$$
$$(A = B,\ w = 0) \quad \text{ou} \quad (A = B,\ u = 0,\ v = 0).$$

enfin, ces équations (α) peuvent être satisfaites en posant

$$uv = 0,\ uw = 0,\ vw = 0;$$

mais pour que ces égalités aient lieu, il est nécessaire que deux des trois quantités u, v, w soient nulles, ou que deux des angles λ, μ, ν soient droits ; ce qui fait coïncider l'axe instantané avec l'un des axes principaux des x, y, z. La proposition énoncée est donc établie.

290. On peut déterminer avec la même facilité la surface décrite en général et pendant le mouvement par l'axe instantané de rotation.

Reprenons les deux équations

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 = \psi^2, \quad A^2u^2 + B^2v^2 + C^2w^2 = \chi^2:$$

en remplaçant u, v, w par leur valeur, ces équations deviennent :

$$\gamma^2 (A \cos.^2 \lambda + B \cos.^2 \mu + C \cos.^2 \nu) = \psi^2,$$
$$\gamma^2 (A^2 \cos.^2 \lambda + B^2 \cos.^2 \mu + C^2 \cos.^2 \nu) = \chi^2,$$

divisant l'un par l'autre il vient :

$$(A \cos.^2\lambda + B \cos.^2\mu + C \cos.^2\nu)\,\chi^2 = (A^2 \cos.^2\lambda + B^2 \cos.^2\mu + C^2 \cos^2\nu)\psi^2,$$

d'où

$$A(\chi^2 - A\psi^2)\cos.^2\lambda + B(\chi^2 - B\psi^2)\cos.^2\mu + C(\chi^2 - C\psi^2)\cos.^2\nu = 0:$$

en nommant ξ, η, ζ les coordonnées d'un point quelconque de l'axe instantané par rapport aux axes principaux, ces coordonnées seront proportionnelles aux

cosinus cos. λ, cos. μ, cos., et par conséquent l'équation ci-dessus pourra être changée en la suivante :

$$A(\chi^2 - A\psi^2)\xi^2 + B(\chi^2 - B\psi^2)\eta^2 + C(\chi^2 - C\psi^2)\zeta^2 = 0.$$

Cette équation convient à tous les points de l'axe instantané ; or, elle représente la surface d'un cône du deuxième degré dont la base a un centre : donc, *l'axe instantané de rotation décrit un cône à base elliptique ou hyperbolique.*

Lorsque l'un des termes de cette équation devient nul ; par exemple, lorsque $\chi^2 = A\psi^2$, le cône se réduit à un plan. On prouverait que, dans ce cas, pour $t=\infty$, on a $\pm\frac{Au}{\chi}=1$, c'est-à-dire que l'axe instantané s'approche indéfiniment de l'axe invariable des x. Lorsque deux des coefficients de l'équation précédente deviennent égaux, le cône devient un cône droit à base circulaire ayant pour axe l'un des trois axes principaux relatifs à ce point.

291. Nous avons fait voir que lorsque l'axe instantané de rotation devient fixe dans le corps, il l'est aussi dans l'espace ; nous allons établir la même proposition par une autre voie qui nous servira à démontrer la réciproque.

Fig 88. Nous allons démontrer d'abord que lorsqu'un système invariable se meut dans un plan, le centre instantané de rotation ne peut être fixe dans le système, sans l'être aussi dans le plan et réciproquement. En effet, supposons que le point C est le centre instantané de rotation, au bout du temps t, les points du système qui, après des intervalles $t+\Delta t$, $t+2\Delta t$, etc., deviennent centres de rotation, forment une certaine

courbe CA différente de la courbe CB formée par les centres mêmes de rotation. Soit c' le point du système qui, après l'intervalle $t+\Delta t$, devient centre de rotation en passant par l'effet du mouvement du système dans la position c_1 : je dis d'abord que $c'c_1$ est un infiniment petit du deuxième ordre, car dans le temps Δt, c' s'est transporté en c_1, et pendant ce temps C est le centre instantané de rotation ; ainsi la vitesse de c' est proportionnelle à l'arc $Cc'=\Delta s$ qui est un infiniment petit du premier ordre : donc l'arc $c'c_1$ est égal à $\Delta t\times i$, i étant la vitesse moyenne de c' entre c' et c_1, c'est-à-dire à un infiniment petit du deuxième ordre.

Or, dans un triangle, la différence de deux côtés est plus petite que le troisième, ainsi Cc' et Cc_1 diffèrent entre eux d'une quantité moindre que $c'c_1$ qui est un infiniment petit du deuxième ordre, c'est-à-dire que ces deux longueurs sont sensiblement égales : de même au bout du temps $t+2\Delta t, c''$ passera en c_2, et pendant ce deuxième instant Δt, c_1 sera centre instantané de rotation ; en sorte qu'on aura $c_1c''=c_1c_2\pm$ un infiniment petit de deuxième ordre, de manière que, si au bout du temps T, A est la position du centre instantané de rotation dans le corps et B sa position sur la courbe Cc_1c_2... les deux arcs CA et CB se composeront d'un même nombre d'éléments qui, deux à deux, ne différeront que d'un infiniment petit de deuxième ordre, et par suite ne différeront eux-mêmes que d'un infiniment petit de premier ordre : donc, quel que soit le temps, on aura rigoureusement CA=CB.

Il résulte de là que dans des temps égaux, le centre instantané de rotation parcourt des espaces égaux sur les deux courbes $Cc'c''$— Cc_1c_2— ; ainsi, en représentant

par s et s' les espaces, on a $\frac{ds}{dt} = \frac{ds'}{dt}$, c'est-à-dire que la vitesse du centre instantané de rotation est la même dans les deux cas.

Par conséquent, si le centre instantané de rotation est fixe dans le corps, il l'est dans le plan et réciproquement.

Il est évident que les deux courbes sont tangentes en C, car nous avons vu que, si sur deux coubes CA,CB qui ont un point commun c, on prend des longueurs Cc', $Cc_{,}$ égales à un infiniment petit du premier ordre, et si la corde $c'c_{,}$ qui joint leurs extrémités est un infiniment petit du deuxième ordre, ces deux courbes sont tangentes au point C.

Si nous passons maintenant à un système qui se meut dans l'espace, nous verrons que les positions successives de l'axe instantané de rotation formeront un cône dans le corps et un autre dans l'espace : ces deux cônes couperont une même sphère suivant deux courbes, et le mouvement de l'extrémité de l'axe instantané de rotation sur ces deux courbes déterminera son mouvement dans le corps et dans l'espace; or, on démontrera, comme précédemment, que le mouvement sur ces deux courbes est le même; d'où il résulte que l'axe instantané de rotation se meut de la même manière dans le corps et dans l'espace.

Donc, lorsque l'axe instantané de rotation est fixe dans le corps, il l'est aussi dans l'espace et réciproquement : donc aussi, pour que cet axe soit fixe dans l'espace, il faut que la vitesse angulaire soit constante, et dans ce cas, comme on le sait, il est nécessairement dirigé suivant un des axes principaux

CHAPITRE VIII.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE CORPS.

§ Ier.

Principe du centre de gravité.

292. Lorsqu'il s'agit d'un système invariable, on peut toujours, en conservant les notations adoptées, mettre les équations du mouvement d'un tel système sous la forme

$$(1)\quad \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma X,\ \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}=\Sigma Y,\ \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}=\Sigma Z,$$

et

$$(2)\quad \Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\Sigma(yZ-zY),\ \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$
$$=\Sigma(zX-xZ),\ \Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\Sigma(xY-yX);$$

or, si nous nommons ξ,η,ζ les coordonnées du centre de gravité du système, alors

$$(3)\quad \Sigma mx=M\xi,\quad \Sigma my=M\eta,\quad \Sigma mz=M\zeta,$$

M étant la masse totale, on tire de là en différentiant

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=M\frac{d^2\xi}{dt^2},\ \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}=M\frac{d^2\eta}{dt^2},\ \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}=M\frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

d'où on conclut .

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2}=\Sigma X,\ M\frac{d^2\eta}{dt^2}=\Sigma Y,\ M\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\Sigma Z:$$

ces trois dernières équations sont celles du mouvement d'un point libre dont la masse serait M_1 et qui serait sollicité par la force principale de toutes les forces du système. On conclut de là qu'un *système invariable se meut toujours de telle manière, que le mouvement du centre de gravité est le même qui aurait lieu, si toutes les masses étaient réunies dans ce point et si toutes les forces extérieures y étaient appliquées chacune suivant sa direction.*

293. Si la force principale est nulle, alors

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=0,\ \frac{d^2\eta}{dt^2}=0,\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}=0,$$

et par suite

$$\frac{d\xi}{dt}=\text{const.}=C,\quad \frac{d\eta}{dt}=C',\quad \frac{d\zeta}{dt}=C'',$$

donc, dans *le cas d'un système entièrement libre*, *qui ne serait soumis à l'action d'aucune force extérieure et dont le mouvement serait uniquement dû à des vitesses initiales imprimées aux points matériels, le centre de gravité décrit une ligne droite d'un mouvement uniforme.*

Considérons maintenant les équations relatives aux mouvements linéaires. Or,

$$y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)}{dt},$$

et de même pour les deux autres quantités analogues :

d'après cette observation, les équations (2) deviendront, en remarquant encore que $\Sigma d = d\Sigma$,

$$(4) \quad d\Sigma \frac{m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)}{dt} = \Sigma(yZ - zY),$$

$$d\Sigma \frac{m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)}{dt} = \Sigma(zX - xZ),$$

$$d\Sigma \frac{m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = \Sigma(xY - yX).$$

Voilà trois nouvelles équations qu'il faut joindre aux trois équations du mouvement du centre de gravité pour avoir le mouvement du système. Remarquons que les sommes Σ qui entrent dans les trois membres représentent les projections algébriques du mouvement linéaire principal des quantités du mouvement du système.

294. Lorsque les deuxièmes membres sont nuls, les dérivées de ces projections sont nulles, et, par conséquent, les projections elles-mêmes sont constantes, et le mouvement linéaire principal est lui-même constant de grandeur et de direction.

On voit que *le mouvement du centre de gravité sera rectiligne et uniforme* et que *le mouvement linéaire principal des quantités de mouvement aura constamment la même valeur et la même direction, si les forces appliquées aux divers points du système* sont telles que l'on ait

$$(5) \qquad \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$
$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0,$$

c'est-à-dire *se font constamment équilibre*.

295. Tout ce qui précède se rapporte à un système invariable, mais il est facile de démontrer que les mêmes propriétés subsistent, ce qui revient à faire voir que les équations (1) et (2) ont encore lieu, lorsque le système est variable et que tous les points sont libres dans l'espace ; seulement alors, outre ces équations, il y en a d'autres. En effet, nous pouvons établir les six équations dont il s'agit au moyen du principe des vitesses virtuelles, en faisant prendre au système six mouvements virtuels, trois autour des axes et trois parallèles aux axes (ces mouvements sont compatibles avec les liaisons) : or, si le système est entièrement libre, on pourra encore lui donner ces six mouvements virtuels, et par conséquent établir les six équations ci-dessus : on peut d'ailleurs les établir directement dans le cas où le système est libre ; en effet, le mouvement d'un point quelconque sera donné par les équations

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\ m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\ m\frac{d^2z}{dt^2}=Z,\ m\frac{d^2x'}{dt^2}=X',\ \text{etc.};$$

ajoutant les équations membre à membre, on aura les trois équations

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma X,\ \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}=\Sigma Y,\ \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}=\Sigma Z;$$

ensuite, par une simple multiplication, on tire des équations précédentes

$$m\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=yX-xY,\ \text{etc.},$$

et ajoutant ces dernières on retombe sous les équations cherchées

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma(yX - xY), \text{ etc.}$$

Remarquons que ces équations peuvent encore s'écrire ainsi :

$$\frac{d\Sigma m\dfrac{dx}{dt}}{dt} = \Sigma X, \quad \frac{d\Sigma m\dfrac{dy}{dt}}{dt} = \Sigma Y, \quad \frac{d\Sigma m\dfrac{dz}{dt}}{dt} = \Sigma X,$$

$$d\Sigma m\frac{\left(y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt}\right)}{dt} = \Sigma(yZ - zY),$$

$$d\Sigma m\frac{\left(z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt}\right)}{dt} = \Sigma(zX - xZ),$$

$$d\Sigma m\frac{\left(x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\right)}{dt} = \Sigma(xY - yX),$$

équations qui deviennent, en supposant les conditions (5) remplies,

$$\Sigma m\frac{dx}{dt} = a, \quad \Sigma m\frac{dy}{dt} = b, \quad \Sigma m\frac{dz}{dt} = c,$$

$$\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = h, \quad \Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = g,$$

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dz} - y\frac{dx}{dt}\right) = f.$$

296. Les propositions qui viennent d'être énoncées établissent le *principe de la conservation du mouvement du centre de gravité*. Ce principe convient à tout système libre, qui n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure, et dans lequel les conditions de la liaison des points matériels ne dépendent pas du

temps. Les propositions dont il s'agit sont d'ailleurs absolument indépendantes des actions intérieures qui peuvent exister entre les points matériels, et elles s'appliquent également lorsque ces points sont réunis par des verges et des fils inextensibles, par des liens élastiques, ou lorsqu'il existe seulement entre eux des forces attractives ou répulsives, ou enfin quand ils sont absolument sans action les uns sur les autres. Par conséquent, ces propositions conviennent même aux cas où il survient entre les parties du système des chocs par l'effet desquels les vitesses des points matériels sont regardées comme subissant instantanément des changements finis, parce que ces changements sont causés par des actions intérieures exercées entre les parties du système.

§ II.

Principe des aires.

297. Les trois dernières équations du paragraphe précédent vont nous servir à établir ce principe. Il est bien évident que quel que soit le système libre qui se meut dans l'espace, on ne violera jamais les conditions de la liaison de ses parties en admettant qu'il tourne, sans changer de figure, autour d'un point fixe quelconque que nous prendrons ici pour origine des coordonnées.

Fig. 89. Considérons un point du système se projetant en B sur le plan xy, nous aurons

$$x = r\cos.p,\quad y = r\sin.p,$$

d'où

$$x + y\sqrt{-1} = re^{p\sqrt{-1}},$$

et par suite

$$dx+dy\sqrt{-1}=e^{p\sqrt{-1}}(dr+rdp\sqrt{-1}):$$

or,

$$x-y\sqrt{-1}=e^{p\sqrt{-1}}\,r;$$

multipliant ces deux équations et égalant les coefficients de $\sqrt{-1}$, il vient

$$\frac{xdy-ydx}{dt}=\frac{r^2dp}{dt},$$

d'où encore

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\Sigma m\,\frac{r^2dp}{dt}.$$

Nous savons que r^2dp est le double de la différentielle de la surface décrite par la projection du rayon vecteur sur le plan xy, et en représentant cette surface par A, on aura

$$dA=\pm\frac{1}{2}r^2dp,$$

ees deux signes se rapportant, le premier au mouvement direct et le second au mouvement rétrograde : on arriverait à un résultat semblable pour chacun des deux autres plans coordonnés : ainsi, en vertu des équations du paragraphe précédent déjà mentionnées, nous pouvons poser les trois suivantes

$$\Sigma(\pm mA)=\frac{f}{2}t,\ \Sigma(\pm mB)=\frac{g}{2}t,\ \Sigma(\pm mC)=\frac{h}{2}t,$$

(Il n'y a pas de constantes puisque pour $t=o$ la surface décrite est nulle) : on conclut de là que *la somme des produits des aires décrites par les projections des rayons vecteurs sur les plans coordonnés par*



la masse correspondante du point qu'on considère, est proportionnelle au temps ou constante dans un temps donné. C'est là ce que l'on nomme *principe des aires.*

Ainsi, dans le cas d'un système libre, le mouvement s'opère toujours de telle manière, que la somme des aires décrites, dans un temps donné, sur un plan quelconque, par les projections des rayons vecteurs émanant d'un centre fixe pris arbitrairement, est constante. Il existe pour chaque centre fixe, un plan à l'égard duquel la valeur de cette somme est plus grande que pour tout autre plan mené par le même point. Ce plan du *maximum des aires*, qui conserve une direction déterminée qui ne varie pas avec le temps, est parallèle au *plan invariable*, ainsi désigné par Laplace, c'est-à-dire perpendiculaire à *l'axe invariable* : on nomme axe invariable une droite menée par l'origine parallèle au mouvement linéaire principal des quantités de mouvement : en effet

$$\Sigma m \frac{xdy-ydx}{dt}$$

est la projection de ce mouvement linéaire sur l'axe des z; cette projection sera un maximum lorsque cet axe sera parallèle à l'axe invariable ou bien lorsque le plan xy sera parallèle au plan invariable; mais le maximum de la quantité

$$\Sigma m \frac{xdy-ydx}{dt},$$

emporte celui de

$$\Sigma m \frac{r^2 dy}{dt},$$

et par suite celui de la surface décrite.

La considération du plan invariable est très-importante dans les études relatives au système du monde et facilite les recherches analytiques.

§ III.

Principe des forces vives.

298. Nous allons d'abord établir l'équation différentielle des forces vives pour le cas général où le système n'est pas invariable mais assujetti à des liaisons indépendantes du temps.

Soit AA'... un système de points matériels, dont les masses sont m, m'... auxquels sont appliquées des forces PP'P''... et dont les vitesses sont $\omega, \omega'\omega''$... Nous y parviendrons au moyen du principe des vitesses virtuelles : les liaisons sont indépendantes du temps, le mouvement effectif est un mouvement virtuel ; par conséquent la somme des mouvements virtuels du système P,P'... est égale à la somme des mouvements virtuels du système QQ'Q''... capable de produire le mouvement observé, on a donc

$$(1) \qquad \begin{aligned} &P\omega\cos.(P\,\hat{}\,\omega)+P'\omega'\cos.(P'\,\hat{}\,\omega')+\text{etc.}...\\ &=Q\omega\cos.(Q\,\hat{}\,\omega)+Q'\omega'\cos.(Q'\,\hat{}\,\omega')+\text{etc.}\end{aligned}$$

De cette équation nous allons déduire celle que nous cherchons. Les cosinus des angles de la vitesse avec les axes sont

$$\frac{dx}{\omega dt}\;\frac{dy}{\omega dt}\;\frac{dz}{\omega dt},$$

les cosinus de la force p avec les axes

$$\frac{X}{P}\;\frac{Y}{P}\;\frac{Z}{P},$$

ainsi,

$$\cos.(P \wedge \omega)=\frac{Xdx+Ydy+Zdz}{P\omega dt},$$

et

$$P\omega \cos.(P \wedge \omega)=\frac{Xdx+Ydy+Zdz}{dt}.$$

Les projections de la force Q sur les axes sont

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\ m\frac{d^2y}{dt^2}\ m\frac{d^2z}{dt^2},$$

et par suite

$$\cos.(Q \wedge \omega)=m\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{Q\omega dt^3},$$

ou bien

$$Q\omega \cos.(Q \wedge \omega)=m\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dt^3}=m\frac{\omega d\omega}{dt};$$

on trouverait la même chose en décomposant Q suivant la tangente et la normale : substituant dans (1), il vient

$$m\frac{\omega d\omega}{dt}+m'\frac{\omega' d\omega'}{dt}+\ldots\ldots=\frac{Xdx+Ydy+Zdz}{dt}+\text{etc.},$$

ou

$$m\omega d\omega+m'\omega' d\omega'+\ldots\ldots=Xdx+Ydy+Zdz+X'dx'+,$$

ou bien

$$\Sigma m\,\omega d\omega=\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz),$$

c'est là l'équatien différentielle des forces vives que nous avions déjà trouvée dans le cas d'un système tournant autour d'un axe fixe.

Si le deuxième nombre est une différentielle exacte

$$df(xyz,\ x'y'z'—).,$$

alors cette équation pourra s'intégrer, et on aura

$$\Sigma\, m\omega^2—\Sigma m\omega_0^2=2\,\{f(xyz,x'y'z'—)—f(x_0y_0z_0,\ x'_0y'_0z'_0)\}$$

que l'on peut aussi écrire ainsi

$$m\omega^2+m'\omega'^2+\ldots-m\omega_0^2+m'\omega_0'^2+\ldots 2\{f(xyz\,x'\ldots)-f(x_0y_0z_0\,x'_0\ldots)\}.$$

299. Il existe un cas fort étendu dans lequel cette formule est une différentielle exacte, c'est celui où toutes les forces qui agissent sur le mobile sont dirigées vers des centres fixes et où l'intensité de chacune d'elles est une fonction de la distance du mobile à son centre d'action.

Désignons par R la force qui émane d'un centre fixe et agit sur le point A, appelons r la distance de ce point à ce centre, on aura

$$Xdx+Ydy+Zdz=\pm Rdr, \quad \pm$$

selon que la force est répulsive ou attractive.

Si au lieu d'une force R il y en avait plusieurs R_1 R_2 émanant de plusieurs centres fixes, le trinome $Xdx+Ydy+Zdz$ serait remplacé par la somme de plusieurs trinomes

$$X_1dx+Y_1dy+Z_1dz+X_2dx+Y_2dy+Z_2dz+$$

qui reviendraient à

$$\pm R_1dr_1\pm R_2dr_2\pm \text{etc.};$$

semblablement, le trinome

$$X'dx'+Y'dy'+Z'dz',$$

relatif à l'action des centres fixes sur un autre point A', sera égal à

$$\pm R'dr'\pm R'_2dr'_2+\ldots$$

on aura donc

$$m\omega d\omega+m'\omega'd'\omega'+\ldots=\pm R_1dr_1\pm R_2dr_2\pm\ldots \pm R'_1dr'_1\pm R'_2dr'_2+, \text{ etc.}.$$

cette équation sera ordinairement intégrable parce que les forces $R_1 R_2 \ldots$ sont fonctions des distances r_1, r_2 correspondantes. Cette équation étant intégrée donne

$$m\omega^2 + m'\omega'^2 + \ldots - (m\omega_0^2 + m'\omega_0'^2 + \ldots)$$
$$= \pm 2 \int_{r_0}^{r} R_1 dr_1 \pm \ldots \pm 2 \int_{r'_0}^{r'} R'_1 dr'_1 \pm \text{, etc.,}$$

Le signe définitif de chaque intégrale est + ou —, selon que la distance du point au centre fixe correspondant a éprouvé une variation dans le même sens ou en sens contraire de celles qu'aurait produites le centre fixe s'il eût agi uniquement. C'est là le principe des forces vives.

300. Au lieu de compter les distances r au centre fixe, on peut compter les distances s des points à la surface d'une sphère dont le centre est au centre fixe, et dont le rayon $= \rho$, de sorte que l'on aura

$$r = \rho + s \qquad \text{d'où} \qquad dr = ds,$$

R deviendra fonction de s, et nous pourrons la désigner par S, alors l'équation différentielle des forces vives devient

$$\frac{1}{2}\left\{ d(m\omega^2 + m'\omega'^2 + \!-\!-) \right\} = \pm S_1 ds_1 \pm S_2 ds_2 + - \ldots$$
$$\pm S'_1 ds'_1 \pm S'_2 ds'_2 \pm \ldots,$$

elle existera quel que soit ρ, elle existera donc lorsque ρ deviendra infini; dans ce cas, la sphère se réduira à un plan, et les forces au lieu d'émaner de centres fixes émaneront de plans fixes, perpendiculairement à ces plans. C'est ce que l'on peut d'ailleurs voir directement comme nous l'avons montré dans une des leçons précédentes.

301. L'équation

$$\Sigma m\omega d\omega = \pm R dr \pm R' dr' \pm, \text{ etc.},$$

qui constitue le principe des forces vives dans le cas où les forces émanent de centres fixes ou de plans fixes, reste encore la même lorsque les points sont soumis à des attractions ou répulsions mutuelles. En effet, reprenons l'équation primitive

$$m\omega d\omega + m'\omega' d\omega + . = X dx + Y dy + Z . dz + X' dx' + Y' dy' + Z' dz' +,$$

et considérons deux points A,A' soumis à des attractions ou répulsions mutuelles : représentons par R la force avec laquelle A attire A'; la réaction sera égale et contraire à cette action : dans le cas de deux points, le deuxième membre de l'équation ci-dessus est Fig. 90.

$$X dx + Y dy + Z dz + X' dx' + Y' dy' + Z' dz'.$$

Voyons ce qu'il devient dans les circonstances présentes : soient xyz, $x'y'z'$ les coordonnées des points AA' on aura, si la force est répulsive, pour l'action de A' sur A,

$$\frac{X}{R} = \frac{x - x'}{r}, \quad \frac{Y}{R} = \frac{y - y'}{r}, \quad \frac{Z}{R} = \frac{z - z'}{r},$$

pour celle qui agit de A en A'

$$\frac{X'}{R} = \frac{x - x}{r}, \quad \frac{Y'}{R} = \frac{y' - y}{r}, \quad \frac{Z'}{R} = \frac{z' - z}{r},$$

donc,

$$X dx + Y dy + Z dz + X' dx' + \ldots\ldots$$
$$= \frac{R\left\{(x - x')d(x - x') + (y - y')d(y - y') + (z - z')d(z - z')\right\}}{r}$$

or, on a

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

d'où l'on tire

$$rdr = (x-x')d(x-x') + (y-y')d(y-y') + (z-z')d(z-z'),$$

et par suite

$$Xdx + Ydy + Zdz + \ldots = Rdr;$$

si la force était attractive, on aurait

$$Xdx + Ydy + Zdz + \ldots = -Rdr:$$

ainsi de suite, s'il y avait plusieurs points, en sorte qu'en intégrant on aura généralement

$$m\omega^2 + m'\omega'^2 + \ldots = \pm 2\int_{r_1 0}^{r_1} R_1 dr_1 \pm 2\int_{r'_0}^{r'_1} R_1 dr_1, \text{ etc.};$$

ce qui montre que la variation de la somme des forces vives ne dépend que des valeurs initiales et finales des distances respectives des points.

302. Examinons maintenant dans quel cas il y a perte ou gain des forces vives.

Considérons d'abord un point attiré ou repoussé par un centre fixe, et partant de l'état de repos : on aura l'équation

$$m\omega^2 = \pm 2\int_a^b Rdr,$$

(a représentant la distance au commencement du mouvement b la distance après un temps t).

Supposons 1° la force répulsive, alors

$$m\omega^2 = 2\int_a^b Rdr,$$

le 1er membre est essentiellement positif, le 2e doit donc l'être aussi ; il faudra donc que $a < b$, donc le

point se sera éloigné du centre fixe, ce qui devait être.

2° Si la force est attractive on aura

$$m\omega^2 = -2\int_a^b \mathrm{R}dr = 2\int_b^a \mathrm{R}dr,$$

ainsi dans ce cas $b < a$, donc le point mobile s'approchera du point fixe, comme cela était évident.

Voyons maintenant ce qui a lieu lorsque le mobile est doué d'une vitesse initiale. Pour une force répulsive

$$m\omega^2 - m\omega_0^2 = 2\int_a^b \mathrm{R}dr,$$

si le 2ᵉ membre de cette équation est positif, alors $a < b$, et il y aura augmentation de forces vives ; si au contraire le 2ᵉ membre est négatif, $a > b$, et il y aura diminution de forces vives.

Si la force est attractive on aura

$$m\omega^2 - m\omega_0^2 = -2\int_a^b \mathrm{R}dr = 2\int_b^a \mathrm{R}dr,$$

si le 2ᵉ membre est positif, $a > b$, et il y a augmentation de forces vives ; au contraire il y a diminution si $b > a$.

Donc en résumant il y aura augmentation ou diminution de forces vives, selon que l'augmentation ou la diminution de la distance des points sera du genre de celles que les forces tendent à produire.

Pour un système quelconque de points il faudra examiner en particulier si chaque intégrale est positive ou négative, et alors on reconnaîtra s'il y a augmentation ou diminution de forces vives.

La valeur absolue de la variation de la somme des

forces vives, est représentée par l'intégrale $2\int_a^b \mathrm{R}dr$, abstraction faite du signe, c'est précisément la force vive acquise par les deux points partant du repos soumis à leur action mutuelle et passant de la plus petite distance à la plus grande ou inversement, suivant que la force est répulsive ou attractive.

Si l'on considérait deux points soumis à une attraction ou répulsion mutuelle, on aurait, quand ces points partent de l'état de repos, pour la somme des forces vives acquises

$$m\omega^2 + m'\omega'^2 = \mp 2\int_a^b \mathrm{R}dr,$$

les deux points se rapprochent ou s'éloignent suivant que la force est attractive ou répulsive, c'est-à-dire suivant que $b<a$ ou $a<b$.

S'il y avait des vitesses initiales, alors on aurait pour la variation de la somme des forces vives

$$m\omega^2 + m'\omega'^2 - (m\omega_0^2 + m'\omega'^2_0) = \mp 2\int_a^b \mathrm{R}dr;$$

on verra de même qu'il y aura augmentation ou diminution selon que la variation de la distance des deux points sera du genre de celle que la force mutuelle tend à produire en sens opposé.

303. Appliquons ce qui précède au mouvement d'un corps pesant; ce corps pourra être considéré comme formé d'une infinité de masses m, m', etc., attirées par un centre fixe : pour la masse m, on aura

$$m\omega^2 - m\omega_0^2 = -2\int_{r_0}^{r} \mathrm{R}dr,$$

ou bien en comptant les distances suivant l'axe des x de haut en bas, on aura

$$dr = -dx,$$

donc

$$m\omega^2 - m\omega_0^2 = 2\int_{x_0}^{x} Rdx;$$

or ici $R = gm$, donc

$$m\omega^2 - m\omega_0^2 = 2gm\int_{x_0}^{x} dx = 2gm(x - x_0),$$

la variation de la somme totale des forces vives sera donc

$$\Sigma m\omega^2 - \Sigma m\omega_0^2 = 2g(\Sigma mx - \Sigma mx_0) = 2gM(\xi - \xi_0),$$

équation semblable à celle que nous avons établie précédemment pour le mouvement du pendule.

304. Appliquons enfin la formule du principe des forces vives

$$\Sigma m\omega d\omega = Xdx + Ydy + Zdz \text{ etc.}$$

au mouvement d'une poulie, en ayant égard à sa masse.

L'équation ci-dessus devient, dans le cas où les forces qui sollicitent le corps sont les forces de la pesanteur,

$$\Sigma m\omega d\omega = mgdx + m'gdx' + \text{etc...}$$

ou

(1) $$\Sigma m\omega^2 - \Sigma m\omega_0^2 = 2gM(\xi - \xi_0);$$

voyons ce que devient cette dernière équation dans le cas dont il s'agit.

Soient m, m' les masses suspendues aux extrémités

de la corde qui s'enroule sur la poulie, soient ω, ω' les
Fig. 91. vitesses de ces masses, k le moment d'inertie de la poulie, r son rayon, alors, en supposant que la vitesse initiale est nulle, le premier membre de cette équation deviendra en nommant γ la vitesse angulaire de la poulie, et en remarquant que

$$\omega = \frac{ds}{dt} = \omega', \ \frac{\omega}{r} = \gamma,$$

ce premier membre deviendra

$$m\omega^2 + m'\omega'^2 + k\gamma^2 = \left(m + m' + \frac{k}{r^2}\right)\omega^2;$$

cherchons maintenant le deuxième membre, soient x, x', Ξ les coordonnées des centres de gravité des deux masses et de la poulie, car nous supposons la poulie hétérogène (l'origine étant au centre de la poulie), alors nous aurons

$$\xi = \frac{mx + m'x' + M\Xi}{m + m' + M} \text{ (M masse de la poulie),}$$

d'où

$$(m + m' + M)\,\xi = mx + m'x' + M\Xi,$$

et l'équation (1) devient

$$(2)\ \left(m + m' + \frac{k}{r^2}\right)\omega^2 = 4gm\,(x - x_0) + 2gm'\,(x' - x'_0) + rgM\,(\Xi - \Xi_0).$$

Si nous nommons s l'arc de la poulie parcouru, cette équation revient à

$$\left(m + m' + \frac{k}{r^2}\right)\omega^2 = 2g\,(m - m')\,s + 2gM\,(\Xi - \Xi_0).$$

Soit θ l'arc parcouru pendant le mouvement par un

point de la circonférence de la poulie à partir de la verticale qui passe par le centre de la poulie, on aura $s=r(\theta_0-\theta)$; de plus, si ρ désigne la distance du centre de gravité de la poulie au centre de figure, on aura

$$\Xi=\rho\cos.\theta,\quad \Xi_0=\rho\cos.\theta_0$$

et l'équation ci-dessus devient

$$(m+m'+\frac{k}{r^2})\omega^2=\left\{(m-m')r(\theta_0-\theta)+\mathrm{M}\rho(\cos.\theta-\cos.\theta_0)\right\}2g;$$

or nous avons

$$\omega=\frac{ds}{ds}=-r\frac{d\theta}{dt},$$

donc

$$\left(m+m'+\frac{k}{r^2}\right)r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\left\{(m-m')r(\theta_0-\theta)+\mathrm{M}\rho(\theta-\cos.\theta_0)\right\}2g,$$

telle est l'équation du mouvement. Si nous posons

$$2g\,\frac{(m-m')r}{m+m'+\frac{\mathrm{K}}{r^2}}=a\qquad 2g\frac{\mathrm{M}\rho}{m+m'+\frac{\mathrm{K}}{r^2}}=b,$$

il reste

$$dt=\frac{-rd\theta}{\sqrt{a(\theta_0-\theta)+b(\cos.\theta-\cos.\theta_0)}}.$$

Si la poulie était homogène, alors

$$\Xi=0,\ \Xi_0=0,\ (m+m'+\mathrm{M})\xi=mx+m'x'_,(m+m'+\mathrm{M})\xi_0$$
$$=mx_0+m'x'_0,$$

et l'équation (2) se réduit à

$$\left(m+m'+\frac{\mathrm{K}}{r^2}\right)\omega^2=2gm(x-x_0)+2gm'(x'-x'_0)$$
$$=2g(m-m')s_1;$$

mais, dans ce cas, le moment d'inertie de la poulie étant celui d'un cylindre, on a

$$K=\frac{1}{2}Mr^2,$$

alors

$$\left(m+m'+\frac{1}{2}M\right)\omega^2=2g(m-m')s,$$

donc

$$\omega^2=2g\frac{m-m'}{m+m'+\frac{M}{2}}s,$$

et en posant

$$g\frac{m-m'}{m+m'+\frac{M}{2}}=g',$$

il vient

$$\omega^2=2g's,$$

d'où

$$2\omega d\omega=2g'dr=2g'\omega dt,$$

donc

$$\frac{d\omega}{dt}=g',$$

donc encore ici le mouvement de la poulie est uniformément accéléré ; seulement, dans ce cas, g' est plus petit que lorsqu'on ne tient pas compte de sa masse, ce qu'on pouvait prévoir.

§ IV.

Principe de la moindre action.

305. Considérons la quantité $\Sigma m\int ds.\omega$ qui se forme en prenant le produit de la masse de chaque point matériel par l'intégrale $\int ds.\omega$. Nous représentons

par ds l'élément de la trajectoire décrite par le point dont la masse est m dans le temps dt, et par ω la vitesse de ce même point à la fin du temps t. L'intégrale $\int ds.\omega$ est prise entre deux points donnés de la trajectoire, qui ont des positions fixes dans l'espace, et par lesquels on admet que le point matériel dont la masse est m, est assujetti à passer entre deux points fixes; la trajectoire décrite par ce point n'est pas déterminée d'avance; la nature de cette ligne dépendra des conditions du système et des forces qui lui sont appliquées. Cela posé, le principe nommé *de la moindre action* consiste en ce que, quel que soit le système et les forces, les trajectoires décrites par les divers points matériels, entre les limites fixes données, seront toujours telles que la quantité $\Sigma m\int ds.\omega$ sera un maximum ou un minimum (c'est-à-dire plus grande ou plus petite que toute autre trajectoire possible), les intégrales $\int ds.\omega$ étant prises entre ces mêmes limites.

Cette proposition ne convient qu'aux cas où les conditions du système sont indépendantes du temps, et où la fonction

$$\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz)$$

est une différentielle exacte $d\Pi$ d'une certaine fonction Π des variables x,y,z. Pour le démontrer, il suffira de faire voir que l'on aura toujours

$$\delta\Sigma m\int ds.\omega=0;$$

en effet l'on a

$$\delta\Sigma m ds.\omega=\Sigma m(\omega\delta ds+ds\delta\omega)=\Sigma m\left(\frac{ds}{dt}\delta ds+\frac{1}{2}dt.\delta\omega^2\right),$$

mais d'une part

$$\delta ds = \frac{dx\delta dx + dy\delta dy + dr\delta dr}{ds},$$

et d'autre part

$$\frac{1}{2}\Sigma m\delta\omega^2 = \delta\Pi = \Sigma(\mathrm{X}\delta x + \mathrm{Y}\delta y + \mathrm{Z}\delta z)$$
$$= \Sigma m\left(\frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2}\right);$$

donc en substituant ces deux valeurs

$$\delta\Sigma m ds.\omega = \Sigma m d\left(\frac{dx\delta x + dy.\delta y + dz\delta z}{dt}\right),$$

intégrant maintenant par rapport à t, l'intégrale indéfinie du 2e membre sera

$$\Sigma m\,\frac{dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z}{dt},$$

quantité nulle aux deux limites, puisque les deux extrémités des trajectoires étant données, on a pour ces points

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0;$$

ainsi, on a, entre les limites dont il s'agit,

$$\delta\Sigma m\int ds.\omega = 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

L'équation précédente revient d'ailleurs à

$$\delta\Sigma m\int dt.\omega^2 = 0,$$

en sorte que le principe, appelé de la moindre action, peut aussi s'exprimer en disant que l'intégrale prise par rapport aux temps des forces vives du système qui

ont lieu entre deux positions données, est toujours la plus grande ou la moindre possible.

CHAPITRE IX.

MOUVEMENT D'UN SYSTÈME ENTIÈREMENT LIBRE.

306. Avant de passer au mouvement d'un système invariable dans l'espace, nous allons chercher à quelle force est dû le mouvement relatif de deux points A, A' animés de vitesses initiales ω_0, ω_0', et soumis à des forces P, P'.

Les équations du mouvement sont, pour le premier,

$$(1)\quad m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\ m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\ m\frac{d^2z}{dt^2}=Z,$$

et pour le deuxième,

$$(2)\quad m'\frac{d^2x'}{dt}=X',\ m'\frac{d^2y'}{dt^2}=Y',\ m'\frac{d^2z'}{dt^2}=Z;$$

les coordonnées relatives du point A', par rapport au point A, sont

$$x_1=x'-x\ \ y_1=y'-y\ \ z_1=z'-z,$$

d'où l'on tire

$$(3)\ \frac{dx_1}{dt}=\frac{dx'}{dt}=\frac{dx}{dt},\ \frac{dy_1}{dt}=\frac{dy'}{dt}-\frac{dy}{dt},\ \frac{dz_1}{dt}=\frac{dz'}{dt}-\frac{dz}{dt},$$

ce qui montre que la vitesse absolue du point A' est la résultante de sa vitesse relative et de la vitesse absolue du point A, ces trois vitesses étant comptées sur des droites partant de A' et dans le sens du mouvement: aussi on connaîtra la vitesse initiale relative du point

A′ quand on connaîtra les vitesses initiales de ces deux points.

Voyons maintenant à quelle force est dû le mouvement relatif.

La force accélératrice du point A est $\frac{P}{m}$; décomposons la force P′ en deux autres, dont l'une soit parallèle à P, et telle que la force accélératrice qui en résultera pour A′ soit $\frac{P}{m}$; alors cette composante sera $\frac{Pm'}{m}$, et l'autre une certaine force S entièrement déterminée : d'après cela X, Y, Z, étant les projections de S, et $X\frac{m'}{m}$ etc., celles de $P\frac{m'}{m}$, on aura les équations

$$X'=X\frac{m'}{m}+X, \quad Y'=Y\frac{m'}{m}+Y, \quad Z'=Z\frac{m'}{m}+Z,$$

ou bien en remplaçant XYZ, X′Y′Z′ par leurs valeurs

$$m'\left(\frac{d^2x'}{dt^2}-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=X, \text{ etc.,}$$

ou bien en différenciant

$$(3) \qquad m'\frac{d^2x_1}{dt^2}=X, \text{ etc.,}$$

équations qui montrent que le mouvement relatif de A′ est dû à la force S : en intégrant on déterminera ce mouvement, pourvu qu'on connaisse les valeurs initiales de $\frac{dx}{dt}$, etc., et $x_1\, y_1\, z_1$.

Ce théorème démontre le principe que nous avons admis au commencement du cours, et qui n'est autre chose que le cas précédent, en supposant que ces deux

points A A′ ont la même position initiale, la même masse et la même vitesse initiale, et que la force P′ est décomposée en deux autres P et S.

307. Passons maintenant au mouvement dans l'espace d'un système soumis à des vitesses initiales ω_0 ω_0'... et a des forces PP′... Soit G le centre de gravité, ω, ω', les vitesses des points AA′... au bout du temps t. Désignons par QQ′... le système de forces capable de produire les mouvements observés, les projections de ces forces seront pour Q Fig. 92.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\quad m\frac{d^2y}{dt^2}\quad m\,\frac{d^2z}{dt^2},$$

pour Q′

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2}\; m'\frac{d^2y'}{dt^2}\; m'\frac{d^2z'}{dt^2},\ \text{etc.},$$

le système devra être équivalent au système PP′... : il faut pour cela que, pour les deux, la force principale et le couple principal soient égaux, et rien n'empêche de prendre le centre de gravité pour centre des moments.

Soit R la force principale de PP′... nous savons que le mouvement du centre de gravité a lieu en vertu de cette force, comme si toute la masse M y était concentrée, en sorte que la force accélératrice de ce point est $\frac{R}{M}$: or, nous pouvons décomposer la force Q en deux autres $\frac{Rm}{M}$ et S, de même Q′ en $\frac{Rm'}{M}$, S′, en sorte que le système QQ′... est remplacé par deux autres

$$\left(\frac{Rm}{M}, \frac{Rm'}{M}....\right)\left(SS'....\right).$$

les forces qui composent le premier sont parallèles, par conséquent leur force principale s'obtient en faisant leur somme, et on voit qu'elle est égale à R ; le deuxième système doit donc être équivalent au couple principal, et comme c'est à ce deuxième système qu'est dû le mouvement relatif du système par rapport au centre de gravité, il en résulte que ce mouvement ne dépend que des vitesses initiales relatives et du couple principal de P, P', etc. ; il est donc indépendant de la force R, c'est-à-dire qu'il est le même que si le centre de gravité était fixe.

On peut parvenir au même résultat d'une manière analytique. En effet, les équations du mouvement sont

$$(1)\quad \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma X,\ \text{etc.},$$

et $$(2)\quad \Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\Sigma(yZ-zY),\ \text{etc.};$$

les trois premières équations montrent, comme nous le savons, que le centre de gravité se meut comme si on y appliquait la force principale après y avoir concentré la masse du système. Voyons ce que prouvent les trois autres : soient $\xi\eta\zeta$ les coordonnées du centre de gravité et $x_1y_1z_1$ les coordonnées relatives par rapport à ce point pris pour origine ; nous aurons

$$(3)\qquad x=\xi+x_1,\quad y=\eta+y_1,\quad z=\zeta+z_1,$$

et de plus,

$$\Sigma mx_1=0,\quad \Sigma my_1=0,\quad \Sigma mz_1=0,$$

d'où

$$(4)\qquad \Sigma m\frac{d^2x_1}{dt^2}=0,\quad \Sigma m\frac{d^2y_1}{dt^2}=0,\quad \Sigma m\frac{d^2z_1}{dt^2}=0:$$

en vertu de (3) les équations (2) deviennent, les premiers membres

$$\Sigma m\left\{(\eta+y_{\prime})\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{d^2z_{\prime}}{dt^2}\right)-(\zeta+z_{\prime})\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{d^2y_{\prime}}{dt^2}\right)\right\}, \text{ etc.}$$

ou bien en vertu de

$$(4)\quad M\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)+\Sigma m\left(y_{\prime}\frac{d^2z_{\prime}}{dt^2}-z_{\prime}\frac{d^2y_{\prime}}{dt^2}\right), \text{ etc.}$$

et les deuxièmes membres se réduisent à

$$\eta\Sigma Z-\zeta\Sigma Y+\Sigma(y_{\prime}Z-z_{\prime}Y),$$

mais à cause de (1), on a

$$M\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)=\eta\Sigma Z-\zeta\Sigma Y;$$

ainsi les équations (3) se réduisent à

$$\Sigma m\left(y_{\prime}\frac{d^2z_{\prime}}{dt^2}-z_{\prime}\frac{d^2y_{\prime}}{dt^2}\right)=\Sigma(y_{\prime}Z-z_{\prime}Y), \text{ etc.};$$

équations du mouvement du système autour d'un point fixe; *donc le mouvement du système a lieu autour du centre de gravité, comme si ce dernier était fixe.*

308. Il suit de là que, toutes les fois que le couple principal de PP'... sera nul, le système ne se mouvra autour du centre de gravité, considéré comme fixe, qu'en vertu des vitesses initiales; ainsi nous saurons déterminer ce mouvement de rotation. Par conséquent, dans ce cas, le double mouvement de translation et de rotation est déterminé.

309. Supposons qu'on lance un corps dans le vide en le frappant suivant une direction qui ne passe pas par son centre de gravité, il y aura un double mouvement. Le centre de gravité décrira une parabole

d'après ce que nous avons vu, et le corps se mouvra par rapport à lui comme s'il était fixe, par conséquent tournera autour de lui ; d'ailleurs dans ce cas le moment principal est nul, puisque les poids qui sollicitent les diverses parties des corps sont parallèles ; donc le mouvement des corps autour du centre de gravité est déterminé par la formule du mouvement d'un système autour d'un point fixe seulement en vertu de vitesses initiales, et nous avons établi ces formules générales et en particulier pour le cas d'un ellipsoïde pesant.

CHAPITRE X.

CALCUL DE L'EFFET DES MACHINES.

310. Les machines sont employées pour remplacer l'action immédiate de l'homme ou des animaux dans la production des objets utiles. Calculer *l'effet* d'une machine, c'est estimer la quantité de travail que l'on peut opérer par son moyen dans des circonstances données.

Malgré la diversité que présentent les opérations auxquelles les machines sont appliquées, on reconnaît qu'elles ont toutes des éléments communs, au moyens desquels on peut les apprécier d'une manière générale et régulière. En effet, toutes les fois qu'il y a un *travail fait par une machine* (c'est-à-dire une opération effectuée dont il résulte la production d'un objet utile ayant une valeur subsistante), il y a nécessairement *un effort exercé sur un point qui parcourt*

en même temps un espace dans le sens de cet effort. La réunion de ces deux circonstances, effort exercé, et espace parcouru dans le sens de l'effort, est nécessaire pour constituer un travail utile auquel on puisse attribuer une valeur.

La vérité de ce principe est manifeste dans les appareils dont l'objet est d'élever des corps pesants, par exemple dans les machines qui servent à élever de l'eau. Elle ne l'est pas moins dans la plupart des autres machines, où l'on reconnaît facilement qu'au point où le travail s'effectue un effort est toujours exercé par une partie de l'appareil qui est mue dans le sens de cet effort.

311. En général, on distinguera dans les machines : 1° l'action du *moteur*, c'est-à-dire de la cause qui a produit dans l'origine le mouvement des parties de l'appareil, qui entretient ce mouvement et empêche qu'il ne soit détruit par des causes opposées; 2° l'action de la *résistance*, action qui résulte immédiatement du travail que la machine peut effectuer, et qui, s'exerçant dans un sens contraire à celui de l'action du moteur, tend continuellement à détruire le mouvement des parties de la machine.

On reconnaîtra de plus, conformément à ce qui a été dit, que l'action du moteur consiste en ce qu'un effort constant ou variable est exercé sur un certain point de la machine qui se meut dans le sens de cet effort; et de même que l'action de la résistance consiste en ce qu'un certain point de la machine exerce sur un corps étranger un effort, et se meut dans le sens de cet effort. On pourra même dans la plupart des cas mettre ces circonstances en évidence, en rem-

plaçant effectivement l'action du moteur par la descente verticale d'un poids égal à l'effort que ce moteur exerçait attaché à l'extrémité d'une corde tendue dans le sens de cet effort; et en remplaçant l'action de la résistance par l'élévation verticale d'un poids égal à l'effort que la résistance exerçait attaché à l'extrémité d'une corde tendue dans le sens de cet effort.

312. La nature de l'action des moteurs sur les machines pour y produire et entretenir le mouvement, et celle des machines sur les résistances pour effectuer l'opération à laquelle la machine est destinée, étant ainsi reconnue, et sachant que ces actions peuvent être assimilées à la descente ou à l'élévation d'un corps pesant, l'évaluation des actions dont il s'agit se présente d'elle-même. Il est visible en effet que l'action résultante de la descente d'un poids, ou le travail nécessaire pour élever un poids, sont d'autant plus grands que le poids est plus grand et que la hauteur est plus grande. Par conséquent, si l'on nomme

P,R les efforts supposés constants, exercés respectivement dans une machine aux points d'application du moteur et de la résistance;

p,r les espaces parcourus respectivement dans un temps donné par ces points dans le sens des efforts P, R;

l'action exercée par le moteur, et la quantité de travail ou l'*effet* produit par la machine dans le même temps seront exprimés par les nombres

$$Pp \quad \text{et} \quad Rr.$$

Dans le cas où les efforts P,R ne sont point constants, on les considérera comme donnés en fonction

des espaces p, r parcourus respectivement dans la direction de ces efforts : l'action exercée par le moteur et l'effet produit par la machine seront exprimés par les intégrales

$$\int P dp \quad \text{et} \quad \int R dr,$$

prises entre les limites correspondantes aux instants où commence et finit le travail.

On voit par là, et d'après les définitions que nous avons données, que les *quantités d'action* exercées respectivement pendant le mouvement de la machine aux points d'application du moteur et de la résistance donnent l'évaluation numérique de l'action du moteur et du travail effectué par l'appareil. Ainsi, les nombres qui représentent l'action du moteur ou l'effet de la machine sont formés du produit d'un nombre d'unités de poids par un nombre d'unités linéaires. On peut regarder les nombres dont il s'agit comme composés d'unités dont chacune est le travail nécessaire pour élever l'unité de poids à l'unité de hauteur, c'est-à-dire dans notre système de mesures pour élever un poids d'un kilogramme à une hauteur d'un mètre (quelques personnes marquent ces nombres de la manière suivante, $1000^{k \times m}$, qui se lit *mille kilogrammes élevés à un mètre.*)

313. Considérons maintenant une machine en mouvement. L'ensemble des corps dont elle est formée constitue un système auquel on peut appliquer les notions générales exposées dans les articles précédents. Ce système est soumis à l'action des forces extérieures, qui sont principalement l'effort exercé par le mo-

teur dans le sens du mouvement, et l'effort exercé par la résistance en sens contraire du mouvement. Il peut exister aussi d'autres actions extérieures, telles que la résistance des milieux dans lesquels les parties de la machine se meuvent. De plus, il se produit généralement des actions intérieures, auxquelles le mouvement même des parties de l'appareil donne naissance, et qui s'exercent toujours en sens contraires de ce mouvement. En prenant en considération toutes ces forces, on peut reconnaître d'une manière générale les conditions auxquelles la marche d'une machine est assujettie.

Conservons les dénominations précédentes, et désignons de plus par

- F l'effort qui doit être surmonté pour vaincre une des résistances produites par le mouvement de l'appareil ;
- f l'espace parcouru à la fin du temps t dans la direction de l'effort F ;
- m la masse d'un des points matériels dont les parties de la machine sont composées ;
- ω la vitesse de ce point à la fin du temps t ;

Nous aurons, d'après le principe des forces vives,

$$\frac{1}{2}\,\Sigma m\omega^2 = \int P dp - S\int F df - \int R dr + const. \dots\dots \text{(A)}$$

Le terme $S\int F df$ représente la somme de toutes les intégrales $\int F df$ qui sont données par les diverses résistances produites par le mouvement de la machine, et que l'action du moteur doit surmonter.

En différentiant par rapport au temps l'équation précédente, elle devient

$$\Sigma m\omega d\omega = Pdp - \Sigma Fdf - Rdr \dots\dots\dots\dots\dots \quad (B)$$

Ces relations donnent lieu aux remarques suivantes.

314. Dans les premiers instants où une machine est mise en mouvement, et où la vitesse de ses parties augmente progressivement, le second membre de l'équation (B) est nécessairement positif, l'action du moteur l'emportant sur celle des résistances. Mais il arrive toujours par la nature des actions dont il s'agit, que l'effort du moteur diminuant et l'effort de la résistance augmentant au contraire à mesure que les vitesses ω augmentent, la valeur du second membre de l'équation (B) tend à devenir nul. Lorsque cela a lieu, cette équation donne $d\omega = 0$; et si les efforts désignés par P, R et F conservent leurs valeurs actuelles, les vitesses des parties de l'appareil ne subissent plus aucune variation, et la machine se meut constamment d'un mouvement uniforme.

Cette uniformité dans le mouvement, qui est le résultat de l'invariabilité supposée des efforts P, R, F à partir de l'instant où leurs valeurs ont satisfait à l'équation

$$Pdp - \Sigma Fdf - Rdr = 0, \dots\dots\dots \quad (C)$$

a effectivement lieu dans un grand nombre de cas. Elle s'établit ordinairement après un intervalle de temps très-court compté du moment où la machine a commencé à se mouvoir. On voit que dans les cas dont il s'agit, les efforts constants exercés par le moteur et la résistance ont des valeurs telles que ces efforts se feraient mutuellement équilibre sur la machine,

conformément aux lois de la statique ; et c'est d'après cette remarque que l'on devra établir la relation qui doit exister entre les actions respectives du moteur et de la résistance, pour que le travail de la machine puisse s'effectuer. On reconnaît de plus que dans un intervalle de temps quelconque, la quantité d'action produite par le moteur à son point d'application est égale à la quantité d'action produite au point d'application de la résistance, augmentée des quantités d'action dues aux résistances intérieures, en sorte que si ces dernières résistances étaient nulles (ce qui est impossible), il y aurait égalité entre les quantités d'action produites par le moteur et consommées par la résistance.

315. Si les valeurs des efforts du moteur et des résistances ne sont point constantes, le mouvement de la machine n'est pas uniforme. Il présente alors des variations régulières et périodiques qui tiennent à ce que l'effort du moteur est alternativement plus grand ou plus petit qu'il ne devrait être pour faire équilibre à l'effort de la résistance. Quand l'effort du moteur est plus grand qu'il ne devrait être pour l'équilibre, le second membre de l'équation (B) du nº 313, est positif, et la vitesse des parties de l'appareil augmente avec le temps. Le contraire a lieu lorsque l'effort du moteur est au contraire plus petit qu'il ne devrait être pour l'équilibre : le second membre de l'équation (B) est alors négatif, et la vitesse décroît avec le temps. La nature du mouvement consiste donc, dans ce cas, en ce que la vitesse croît et décroît alternativement en oscillant autour d'une valeur moyenne. Les maxima et minima de la vitesse ont lieu dans les in-

stants où $d\omega = 0$, c'est-à-dire lorsque la condition exprimée par l'équation (C) subsiste, ou lorsque les efforts du moteur et de la résistance ont les valeurs convenables pour se faire réciproquement équilibre sur la machine. Les écarts de la vitesse à partir de sa valeur moyenne sont d'autant plus grands, tout étant égal d'ailleurs, que la masse et la vitesse actuelle des parties de la machine sont plus petites.

Si d'ailleurs le mouvement s'opère d'une manière régulière, les mêmes valeurs des efforts du moteur et des résistances, et les mêmes valeurs de la vitesse de chaque partie se reproduisent dans le cours de chacune des périodes entre lesquelles la durée du mouvement est partagée. Par conséquent la force vive des parties de la machine reprend, à la fin d'une de ces périodes, la même valeur qu'elle avait au commencement. D'où l'on peut conclure, par l'équation (A) du n° 313, que, dans un intervalle de temps comprenant un nombre entier des périodes dont il s'agit, la quantité d'action produite par le moteur est toujours égale aux quantités d'action consommées par la résistance résultant du travail de la machine, et par les résistances intérieures produites par le mouvement même des parties de l'appareil.

Lorsque, comme on l'a supposé n° 314, le mouvement d'une machine est uniforme, la relation qui doit être établie entre le moteur et la résistance, résulte de ce que leurs efforts doivent avoir les valeurs convenables pour qu'il y ait équilibre statique entre ces efforts. Lorsque, comme nous le supposons ici, le mouvement présente des variations périodiques, la relation dont il s'agit doit résulter de l'égalité des

quantités d'action produites respectivement par le moteur et par la résistance dans le cours de chaque période. On posera donc l'équation

$$\int Pdp = \Sigma \int Fdf + \int Rdr, \dots\dots\dots \quad \text{(D)}$$

les intégrales $\int$ étant supposées prises pour un intervalle de temps au commencement et à la fin duquel les vitesses désignées par ω ont les mêmes valeurs. Et cette équation devra être considérée comme exprimant une sorte *d'équilibre dynamique*, d'après lequel la grandeur de l'action du moteur qui exécuterait un travail donné pourrait toujours être déterminée.

316. La question qui se présente ordinairement dans le calcul d'une machine consiste à déterminer l'action du moteur qui est nécessaire pour produire un effet donné; ou bien l'effet qui sera produit par la machine lorsqu'on lui appliquera un moteur dont l'action sera donnée. On voit par les notions précédentes que cette question est toujours ramenée à distinguer les efforts exercés aux points d'application du moteur et de la résistance, et à savoir apprécier les forces intérieures, telles que les frottements et autres résistances de cette nature, que l'action du moteur doit surmonter. Les forces dont il s'agit étant évaluées, l'application des principes de statique et de dynamique exposés dans les articles précédents conduira toujours à la connaissance des relations cherchées, relations dont la nature a été indiquée dans les n°s 314 et 315. Nous ne pouvons d'ailleurs entrer ici dans les détails qui seraient nécessaires pour mettre à même d'apprécier dans divers cas les résistances intérieures,

objet qui exige une étude spéciale, et nous ajouterons seulement une remarque relative au cas où il s'opérerait des chocs dans le mouvement de l'appareil.

On doit alors appliquer les notions présentées précédemment; et par conséquent l'altération produite dans le mouvement de l'appareil par l'effet d'un choc, doit être considérée comme dépendant de la nature physique des corps, et par conséquent comme inconnue, à moins d'une recherche spéciale fondée sur la définition mécanique de leur composition. Mais on regarde ordinairement dans les applications les corps entre lesquels les chocs s'opèrent comme présentant les propriétés admises par nous, d'où il résulte que les points en contact des deux corps qui se sont choqués, sont supposés avoir un mouvement commun dans l'instant qui suit le choc, et que par l'effet du choc le système a perdu la quantité de force vive qui serait due aux vitesses que les corps ont perdues. En opérant d'ailleurs d'après les notions indiquées, conformément à ce qui a été dit à la fin du n° 315, on déterminera toujours les changements de vitesse résultant des chocs, détermination pour laquelle il faudra en général prendre en considération des résistances particulières qui ne se développent qu'à l'instant du choc et cessent quand il est terminé. On pourra donc apprécier les pertes de force vive qui résulteraient d'un choc. Quant à la manière d'en tenir compte dans le calcul de la machine, soit en général m la masse d'une partie de cette machine, et Ω la différence entre les vitesses de cette partie qui ont lieu avant et après le choc : la perte de force vive due au choc sera d'après ce qui a été dit ci-dessus, ex-

primée par $\Sigma m \Omega^2$, le signe Σ indiquant que l'on a formé la somme de toutes les pertes de force vive $m \Omega^2$ qui ont eu lieu dans l'appareil. On en conclut que les forces intérieures développées pendant la durée du choc, ont produit une quantité d'action exprimée numériquement par $\frac{1}{2} \Sigma m \Omega^2$; et par conséquent qu'en posant l'équation (D) et opérant de la manière indiquée n° 315, on doit ajouter cette quantité d'action au second nombre, et écrire :

$$\int \mathrm{P}dp = \Sigma \int \mathrm{F}df + \frac{1}{2} \Sigma m \Omega^2 + \int \mathrm{R}dr \; . \; . \; . \; . \quad \text{(E)}$$

Il est nécessaire en effet que le moteur ait reproduit dans le sens du mouvement la quantité d'action que les forces développées par le choc ont consommée; puisque nous supposons qu'à la fin de l'intervalle de temps pour lequel les intégrales désignées par $\int$ sont prises, toutes les parties de l'appareil ont repris les vitesses qui avaient lieu au commencement de cet intervalle, en sorte que la force vive du système n'a subi aucune variation.

317. L'utilité principale des machines, considérées sous le point de vue économique, consiste dans les moyens qu'elles présentent pour substituer dans les opérations des arts, les forces des animaux et surtout celles des agents naturels (tels que la chute des corps graves, le choc des vents, les changements d'état produits par la chaleur, etc.), à la force coûteuse de l'homme. On donne en général le nom de *moteur* à tout agent naturel dont l'action peut faire marcher une machine et exécuter par son moyen un travail. Ainsi l'action d'un ou plusieurs animaux, celle d'une chute

d'eau, celle du vent dont le choc serait reçu sur une surface donnée, celle qui résulte de la combustion d'une quantité déterminée de charbon, etc., sont des moteurs.

Un moteur étant donné, il est évident que la quantité de travail, que l'on pourra lui faire produire, est limitée. On reconnaît de plus, par un examen attentif, que l'on peut tirer du même moteur des quantités de travail très-différentes, suivant la manière dont son action est employée. En désignant, comme ci-dessus, par P, l'effort exercé par le moteur, par V, la vitesse du point d'application de cet effort, on a

$$PV,$$

pour l'expression de la quantité d'action produite dans l'unité de temps. Or les quantités P et V sont toujours liées l'une à l'autre de telle manière que l'une diminue quand l'autre augmente : on doit chercher à régler l'action de manière que la valeur du produit PV soit la plus grande qu'il est possible.

Lorsqu'il s'agit de l'homme ou d'un animal qui ne peut travailler chaque jour que pendant un certain temps T, *l'action journalière* est représentée par

$$PVT.$$

Les trois facteurs de ce produit ont également des valeurs dépendantes les unes des autres, dont chacune diminue nécessairement lorsque les deux autres augmentent, et qu'il faut chercher à régler de manière à obtenir, à fatigue égale, la plus grande quantité de travail qu'il est possible.

TROISIÈME PARTIE.

HYDROSTATIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

318. L'*hydrostatique* est la partie de la statique qui traite de l'équilibre des fluides.

On désigne généralement par le nom de *fluides* les corps qui n'opposent presqu'aucune résistance, lorsqu'on entreprend d'en séparer les parties, les unes par rapport aux autres ou par rapport aux parois solides des vases dans lesquels ils sont contenus, on distingue d'ailleurs deux espèces de fluides : 1o les liquides ou *fluides incompressibles* dont le volume, à masse égale, est sensiblement invariable, et qui, lorsqu'ils ne sont soumis à l'action d'aucune force intérieure, peuvent être contenus dans un vase de figure quelconque sans exercer aucun effort contre les parois de ce vase; 2° les *fluides aériformes* ou les *fluides élastiques* dont le volume, à masse égale, peut varier d'une manière indéfinie, dont les parties tendent sans cesse à s'écarter les unes des autres par l'effet d'une force de répulsion intérieure, et qui exercent toujours un certain effort contre les parois des vases qui les contiennent. Les fluides élastiques comprennent l'air atmosphérique, les gaz et même les vapeurs.

Nous disons que les fluides n'opposent presqu'aucune résistance à la séparation de leurs parties. En effet dans la nature, ces parties présentent généralement un certain degré d'adhérence, qui produit ce qu'on appelle leur *viscosité*, et elles ne peuvent être unies les unes par rapport aux autres, sans un effort sensible. Mais comme les résistances dont il s'agit sont fort petites, par rapport aux forces qui produisent les phénomènes principaux, on en fait abstraction dans la théorie mécanique de l'équilibre, et du mouvement des fluides.

319. Si on plonge un corps dans un fluide en repos, ce dernier exerce contre la surface du corps une pression normale à cette surface; car si cette pression n'était pas normale, les molécules du fluide, à cause de Fig. 93. leur grande mobilité, glisseraient le long du corps.

Concevons que dans un fluide en repos, on plonge un corps solide, considérons un élément s de ce corps et un point A de cet élément, ayant pour coordonnées x, y, z. Le fluide exercera contre cet élément une certaine pression P, variable avec l'étendue de la surface et s'annulant avec elle; mais le rapport $\frac{P}{s}$ ne sera pas nul après ce décroissement et s'approchera d'une certaine limite p que l'on nomme *pression hydrostatique* du fluide au point A auquel se réduit l'élément : on a bien $\frac{P}{s}=p$: cette pression p est analogue à la densité, elle varie avec la position du point A sur l'élément, et est fonction de x, y, z. Lorsque s est très-petit, on peut écrire

$$\frac{P}{s}=p(1\pm\epsilon),\quad P=ps(1\pm\epsilon),$$

de sorte que dans ce cas P est sensiblement égal à ps, c'est-à-dire que la pression est sensiblement égale au produit de l'élément par la pression hydrostatique.

Si l'on désigne par a, b, c, les projections de la pression P sur les trois plans coordonnées, si l'on suppose en outre l'élément plan, $\frac{a}{s}$ sera le cosinus de l'angle de l'élément avec un plan perpendiculaire à l'axe des x : or la pression P est normale à l'élément, ainsi $\frac{a}{s}$ est aussi le cosinus de l'angle de P avec l'axe des x, et par suite la projection de P sur cet axe est

$$P \times \frac{a}{s} = p(a \pm \epsilon);$$

les projections de P sur les deux autres axes sont de même

$$p(b \pm \epsilon), \quad p(c \pm \epsilon);$$

c'est-à-dire que la projection de la pression sur l'une des coordonnées est sensiblement égale au produit de la pression hydrostatique par la projection de l'élément sur le plan coordonné perpendiculaire à cet axe.

CHAPITRE PREMIER.

CONDITIONS D'ÉQUILIBRE D'UN FLUIDE SOLLICITÉ PAR DES FORCES QUELCONQUES.

§ Ier.

Égalité des pressions, Équations d'équilibre, Principe des vitesses virtuelles.

320. Considérons une masse fluide dont tous les éléments sur toutes les molécules sont soumis à une
Fig. 94. force accélératrice φ. Prenons sur une droite parallèle à l'axe des x, deux points A et B, et concevons un petit cylindre dont la génératrice est parallèle à AB et qui enveloppe cette droite : par les points A et B, menons deux plans quelconques terminés par le cylindre. Supposons maintenant que le liquide compris dans ce cylindre se solidifie tout à coup, mais de telle manière qu'en chaque point la densité reste la même que précédemment, et que chaque point soit soumis à la même force accélératrice que les autres molécules; si l'équilibre subsistait avant cette solidification, il existera encore après, et le cylindre devenu solide restera en équilibre au milieu du liquide. Donc les forces qui maintiennent le cylindre en équilibre devront satisfaire aux équations de condition qui expriment l'équilibre d'un système invariable : on aura ainsi six équations dont une seule suffira pour exprimer

la relation qui existe entre les pressions exercées sur les deux éléments extrêmes.

Pour avoir cette relation, il nous suffit d'exprimer que la somme des projections sur l'axe des x, des forces qui sollicitent le cylindre est égal à zéro. Ces forces sont: 1° la force accélératrice φ qui sollicite chaque molécule du cylindre; 2° la pression hydrostatique p_0 qui agit sur l'élément supérieur; 3° la pression hydrostatique p, qui agit sur l'élément inférieur; 4° enfin les pressions hydrostatiques qui s'exercent sur toute la surface cylindrique; mais nous n'avons pas besoin de tenir compte de ces dernières, puisqu'elles agissent normalement à l'axe des x, et que nous n'avons à considérer que les forces dirigées suivant cet axe. Cherchons la composante de la force φ sur l'axe des x: menons deux plans perpendiculaires à l'axe des x et distants entre eux d'une quantité très petite Δx: en nommant a une section du cylindre perpendiculaire à l'axe, $a\Delta x$ sera le solide compris entre les deux plans, et $a\rho\Delta x$ sera la masse de ce solide (ρ étant la densité): en représentant par X, Y, Z, les projections de φ sur les axes des coordonnées, $a\rho X\Delta x$ sera la composante de φ suivant l'axe des x ou l'action de φ sur le petit cylindre le long de cet axe: ainsi l'action de φ sur tout le cylindre sera représentée par une somme de produits semblables et sera égale à $a\Sigma\rho X\Delta x$: nommant x_0, x_1, les abscisses des deux points A et B, et passant à la limite, l'action de la force accélératrice sur le cylindre sera l'intégrale

$$a\int_{x_0}^{x_1}\rho X dx.$$

Si s_0 représente la surface de l'élément supérieur, la pression exercée sur cet élément sera $p_0 s_0$; or $\frac{a}{s_0}$, est le cosinus de l'angle que fait l'élément supposé plan avec un plan perpendiculaire à l'axe des x ou bien le cosinus d'une normale à cet élément avec cet axe lui-même. De plus, nous savons que les pressions sont normales aux surfaces; ainsi le produit $p_0 s_0 \times \frac{a}{s_0}$ ou $p_0 a$, sera la projection sur l'axe des x de la pression exercée sur l'élément supérieur: de même on verra que $p_1 a$ est la projection de la pression exercée sur l'élément inférieur; donc, en considérant comme positives ou négatives les forces qui agissent dans le sens des x, ou en sens contraire, on aura l'équation

$$p_0 a - p_1 a + a\int_{x_0}^{x_1} \rho X dx = 0 \text{ ou } p_0 - p_1 + \int_{x_0}^{x_1} \rho X dx = 0,$$

ou bien

$$p_1 = p_0 + \int_{x_0}^{x_1} \rho X dx:$$

telle est la relation qui existe entre les pressions hydrostatiques exercées sur les éléments supérieur et inférieur.

Cette équation montre que la *pression* en B est indépendante de la direction suivant laquelle elle s'exerce; c'est-à-dire *qu'elle est la même dans toutes les directions*. Proposition fort importante que l'on pouvait pressentir, et que l'on admet dans la plupart des traités.

321. Si au lieu de considérer un point déterminé B,

on considérait un point quelconque de cette droite, dont l'abscise serait x, et la pression hydrostatique p, on aurait alors

$$p=p_0+\int_{x_0}^{x}\rho X dx,$$

d'où l'on tire en différentiant

$$\frac{dp}{dx}=\rho X.$$

Si l'on considérait des droites parallèles aux axes des y et des z, on trouverait de même

$$\frac{dp}{dy}=\rho Y,\quad \frac{dp}{dz}=\rho Z,$$

et par suite

$$\frac{dp}{dx}dx+\frac{dp}{dy}dy+\frac{dp}{dz}dz=\rho(Xdx+Ydy+Zdz),$$

ou

$$dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz).$$

Il faut poser pour l'équilibre que le deuxième membre de cette équation soit une différentielle exacte, ce qui exige les trois relations

$$d\frac{(\rho X)}{dy}=d\frac{(\rho Y)}{dx},\quad d\frac{(\rho X)}{dz}=d\frac{(\rho Z)}{dx},\quad d\frac{(\rho Y)}{dz}=d\frac{(\rho Z)}{dy}$$

réciproquement, si ces relations sont satisfaites, l'équilibre aura nécessairement lieu dans la masse fluide, car la valeur de p, tirée de l'équation précédente, satisfera aux trois équations générales de l'équilibre.

322. Telles sont les équation d'équilibre auxquelles les valeurs des forces X, Y, Z doivent satisfaire dans toute l'étendue du fluide pour que ce fluide demeure en équilibre sous l'action de ces forces.

Dans le cas particulier où le fluide est incompressible et homogène la densité ρ étant constante, il est nécessaire pour que l'équilibre subsiste, que la fonction $Xdx+Ydy+Zdz$ soit une différentielle complète d'une fonction des trois variables x,y,z, et par conséquent que les composantes de la force qui sollicite chaque molécule, satisfassent aux équations

$$\frac{dX}{dy}=\frac{dY}{dx},\ \frac{dX}{dz}=\frac{dZ}{dx},\ \frac{dY}{dz}=\frac{dZ}{dy}.$$

L'action de la plupart des forces naturelles est conforme à ces conditions. Elles seront accomplies toutes les fois que les molécules du fluide seront sollicitées par des forces émanant des centres fixes ou mobiles dont l'intensité sera fonction des distances des molécules à ces centres.

323. Tout ce que nous venons de dire suppose que la masse fluide est contenue dans un vase fermé de toutes parts, car alors la pression, supportée par chacun des points du vase, sera détruite par la résistance du vase supposée indéfinie ; mais si une portion du vase est ouverte de manière qu'il y ait une surface du liquide libre, soumise ou non à une pression intérieure, il faudra pour l'équilibre que l'équation précédente puisse s'intégrer, c'est-à-dire que pour toute cette surface la valeur de p soit égale à la pression antérieure ou nulle.

Si $\varphi=o$, alors $dp=0, p=\text{const.}=c$: d'après cela, il est évident que, si un liquide est renfermé dans un vase fermé de toutes parts il est en équilibre, et qu'il en est encore de même s'il a une surface libre soumise à une pression nulle ou constante.

Si le liquide est contenu dans un vase cylindrique ouvert par le haut, et si en outre sa surface supérieure est pressée par un piston soumis à une force P; dans ce cas la pression hydrostatique, en chaque point du couvercle, étant p, la pression sur un de ses éléments a est pa, et par suite la pression totale est Fig. 95.

$$p\Sigma a = pA,$$

A représentant la surface du piston ou la situation du cylindre, on a donc

$$P = pA, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{P}{A};$$

d'ou il résulte que la pression en un point quelconque, ne dépend que de la surface contre laquelle presse le piston, et qu'elle lui est inversement proportionnelle; en sorte, par exemple, que la même force P produirait une pression double si elle était appliquée à un piston dont la surface A' serait égale à $\frac{A}{2}$.

Si l'on considère deux vases communiquant par un canal, et munis de pistons, la pression p exercée sur le premier vase sera, comme nous l'avons vu, $p = \frac{P}{A}$, de même pour l'autre elle sera $p' = \frac{P}{A}$: or pour qu'il y ait équilibre on doit avoir l'égalité Fig. 96.

$$p = p' \quad \text{ou} \quad \frac{P}{A} = \frac{P'}{A'},$$

ou bien $P : P' :: A : A'$; il ressort de cette proportionnalité, qu'en donnant une très-grande base à l'un des pistons et une très-petite à l'autre, on pourra, à l'aide

d'une petite force, en équilibrer une très-grande ; c'est là le principe de la *presse hydraulique de Pascal.*

324. On appelle en général une *machine* tout appareil au moyen duquel une force agit sur des points hors de sa direction, et y produit des efforts plus grands ou plus petits que si elle y était immédiatement appliquée. On peut donc considérer comme une machine un liquide incompressible contenu dans un vase fixement attaché, en vertu de sa propriété de transmettre également en tous sens les pressions exercées sur sa surface.

Fig. 97. Le principe des vitesses virtuelles s'observe dans l'équilibre de cette machine comme dans celui de toutes les autres. En effet, considérons un liquide contenu dans un vase immobile et de figure quelconque, percé de plusieurs ouvertures munies de pistons dont les bases A, A', A'', etc., sont soumises à des forces P, P', P'' (on suppose la force φ nulle, de sorte que p est constante), en désignant par p, p', p'', les pressions hydrostatiques qui en résultent, on aura les égalités

$$p=\frac{P}{A}, \quad p'=\frac{P'}{A'}, \quad p''=\frac{P''}{A''}, \text{ etc.}$$

et ces pressions devant être égales pour l'équilibre, on en conclut les proportionnalités

$$(1) \qquad P:P':P''... :: A:A':A''...$$

Supposons maintenant que l'équilibre soit troublé, le premier piston parcourra un certain espace s, le second un espace s', en sorte que

$$As,\ A's',\ A''s'', \text{ etc.},$$

seront les variations de volume survenues dans les

cylindres dans lesquels les pistons peuvent se mouvoir; mais pour que l'équilibre subsiste après ce déplacement virtuel, il faudra que le volume total occupé par le liquide n'ait pas changé, ou bien que la somme des variations de volume prises avec leurs signes soit nulle, ce qui revient à

$$\pm As \pm A's' \pm A''s'' \ldots = 0,$$

ou bien, en différentiant et observant que

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad \frac{ds'}{dt} = 0, \text{ etc.};$$

ou bien, dis-je,

$$\pm A\omega \pm A'\omega' \pm A''\omega'' \ldots = 0,$$

(ω, ω', ω'' étant les vitesses virtuelles), égalité qui, à cause de (1), revient à

$$\pm P\omega \pm P'\omega' \pm P''\omega'', \text{ etc.} = 0;$$

or, chaque vitesse est dirigée suivant la tige du piston correspondant, c'est-à-dire dans la direction de la force qui le sollicite, et le signe $\pm$ provient de ce que cette vitesse peut avoir lieu dans le sens de la force ou en sens contraire; ainsi l'équation précédente peut être remplacée par la suivante :

$$P\omega \cos.(P, \omega) + P'\omega' \cos.(P', \omega') + P''\omega'' \cos.(P'', \omega'') + \text{etc.} = 0,$$

formule des vitesses virtuelles appliquées aux forces, et non au liquide qui n'est ici qu'une machine qui lie les forces.

§ II.

Surfaces de niveau; équilibre des liquides pesants.

325. Reprenons l'équation générale

$$dp = dF(x, y, z),$$

d'où l'on tire

$$p = F(x, y, z) + \text{const.},$$

équation qui donne la valeur de la pression en un point quelconque du fluide, rapportée à l'unité de surface. Ainsi l'expression de p en x, y, z, n'est autre chose que la fonction même de ces trois variables dont la quantité

$$\rho\,(Xdx + Ydy + Zdz)$$

est la différentielle complète. Ainsi, dans un fluide en équilibre, la pression est toujours exprimée par une fonction finie des coordonnées auxquelles sont rapportés les points du fluide. Il est visible d'ailleurs que pour un point donné, la valeur de la pression sera trouvée la même, quelle que soit la direction dans le sens de laquelle on la considère. La constante se déterminera d'après la valeur de la pression dans un point déterminé du fluide, valeur qui doit être donnée; en mettant ensuite dans la formule précédente, pour x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque du fluide, on connaîtra la pression qui s'exerce en ce point dans toutes les directions.

La même formule donne également la pression exercée contre la paroi solide d'un vase dans lequel le liquide serait contenu. Cette pression est alors détruite par la résistance de la paroi; mais s'il y a, dans le liquide, une surface libre ou non soumise à une pression

indéfinie, alors il se trouvera dans ce liquide une suite de points pour lesquels la pression sera constante. Si on représente cette pression par π, on aura pour tous les points dont il s'agit

$$(1) \qquad F(x, y, z) = \pi - c,$$

(c étant la constante); et comme c est déterminé par la condition que, pour tous les points de la surface libre, p doit se réduire à la pression extérieure, il en résulte que l'équation (1) est l'équation d'une surface pour tout point de laquelle la pression hydrostatique est constante. Cette surface est ce qu'on appelle *une surface de niveau*. On a pour tous les points d'une telle surface

$$dp = 0 \quad \text{ou} \quad \rho(Xdx + Ydy + Zdz) = 0,$$

ou bien encore

$$(2) \qquad Xdx + Ydy + Zdz.$$

Telle est l'équation différentielle à laquelle doivent satisfaire les coordonnées appartenant non-seulement à la surface libre du liquide, mais encore à toute surface de niveau ou dont tous les points sont soumis à une pression constante.

326. Dans l'intérieur d'un fluide, on distingue les surfaces de niveau par la propriété de rencontrer toujours à angle droit la direction de la force qui en sollicite les molécules : en effet, en désignant par $u = o$ l'équation d'une surface de niveau, les cosinus des angles d'une normale à cette surface sont proportionnels à

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz},$$

or, de $u=o$, on tire

(3) $$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz=0,$$

et par conséquent, en appelant λ,μ,ν les angles de la normale avec les axes coordonnés, on déduit de (2) et (3)

$$\frac{\cos.\lambda}{X}=\frac{\cos.\mu}{Y}=\frac{\cos.\nu}{Z},$$

D'ailleurs, X,Y,Z sont proportionnels aux cosinus des angles de la force accélératrice avec les mêmes axes : donc, *pour tous les points d'une surface de niveau, la normale se confond en direction avec la force accélératrice, en sorte que lorsque cette dernière est constante de direction, la surface de niveau est plane.*

327. Dans le cas particulier où la fonction $Xdx+Ydy+Zdz$ est une différentielle exacte, ce qui a lieu par exemple quand la force accélératrice émane d'un centre fixe ; on a

$$dp=\rho df(x,y,z)=\rho du \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{\rho}=du,$$

$\frac{dp}{\rho}$ devant être une différentielle exacte, il faut que ρ soit en fonction de p, d'où l'on conclut que dans toute l'étendue d'une surface de niveau la densité doit être constante.

328. D'après cela, si l'on considère des liquides de densités différentes, superposés dans un vase, les surfaces de contact ou de séparation seront nécessairement des surfaces de niveau ; car s'il en était autrement, on pourrait toujours, par un point d'une surface de contact, mener une surface de niveau qui la coupe-

rait en plusieurs points, et par suite la surface de niveau ne serait pas homogène.

Dans le cas d'un liquide pesant qui a une surface en contact avec l'air, cette surface est nécessairement horizontale, puisqu'elle est une surface de niveau et qu'elle est soumise à une pression constante de direction : seulement, si cette surface avait une grande étendue, elle serait sphérique et homogène.

Si des liquides de diverses densités sont superposés, il n'est pas nécessaire, pour qu'il y ait mathématiquement équilibre, qu'ils soient superposés dans l'ordre des densités, il suffit que les couches de contact soient des surfaces de niveau. On doit remarquer seulement que l'équilibre ne sera stable, qu'autant que les couches du fluide seront disposées de manière que les plus denses soient les plus rapprochées du centre d'où émanent les forces attractives qui sollicitent les molécules.

329. Dans le cas d'un fluide élastique homogène, où la densité est supposée proportionnelle à la pression, la loi suivant laquelle la densité varie d'une couche de niveau à une autre est déterminée. Posant

$$p = k\rho,$$

K étant un coefficient constant, l'équation

$$\frac{dp}{\rho} = du$$

devient

$$k\frac{dp}{p} = du,$$

et donne en intégrant

$$p = A.e^{\frac{u}{k}}, \quad \rho = \frac{A}{k}.e^{\frac{u}{k}}$$

A étant une constante arbitraire et e la base des logarithmes hyperboliques.

Dans les questions qui se rapportent aux effets naturels, la densité ne peut être supposée proportionnelle à la pression dans un fluide élastique, à moins que la température ne soit constante dans toute l'étendue du fluide. En général, la densité est une fonction de la température et de la pression. L'équilibre exigeant que le deuxième membre de l'équation $dp=\rho du$ soit une différentielle complète, il faudra que ρ soit une fonction de u, cette équation étant intégrée donnera la loi des pressions, d'où l'on conclura celle des densités, mais ρ étant fonction de la température, il en sera de même de p, d'où l'on conclut que la pression et la température seront constantes ensemble et varieront ensemble dans l'intérieur du fluide. L'équilibre ne peut donc subsister dans un fluide élastique, à moins que la température ne soit uniforme dans tous les points d'une même surface de niveau. Dans la réalité cette proposition doit aussi s'appliquer aux fluides appelés communément incompressibles, puisque leur densité varie sensiblement avec la température.

330. Pour donner une application des résultats précédents, nous allons considérer le cas d'une masse fluide dont toutes les molécules seraient attirées vers un centre pris pour origine des coordonnées, avec une force proportionnelle à leur distance à ce centre, et tourneraient autour de l'axe des z avec une même vitesse angulaire. Désignant par F la force d'attraction centrale pour l'unité de masse et l'unité de distance, la valeur de cette force au point ayant pour coordonnées x, y, z, sera

$$-F\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

et ses trois composantes dans le sens des axes seront respectivement

$$-Fx, -Fy, -Fz,$$

la valeur de la force centrifuge au même point, en appelant ν la vitesse angulaire, sera $\nu^2\sqrt{x^2, y^2}$, et ses trois composantes dans le sens des axes seront respectivement $\nu^2 x$, $\nu^2 y$ et 0. Ainsi la fonction désignée dans les n^{os} précédents par $xdx+ydy+zdz$ est ici

$$-F(xdx+ydy+zdz)+\nu^2(xdx+ydy),$$

et l'on a par conséquent, pour l'équation différentielle des surfaces de niveau et de la surface même du fluide supposé en équilibre,

$$-F(xdx+ydy+zdz)+\nu^2(xdx+ydy)=0,$$

Comme le fluide doit évidemment affecter ici la figure d'un solide de révolution autour de l'axe des z, il suffit de considérer un des méridiens. En faisant donc $y=0$, il viendra

$$-F(xdx+zdz)+\nu^2 xdx=0,$$

équation qui donne en intégrant

$$-F(x^2+z^2)+\nu^2+x^2=A \quad \text{ou} \quad (F^2+\nu^2)x^2+Fz^2=A,$$

A étant une constante arbitraire. Ainsi la figure affectée par le fluide est un ellipsoïde de révolution autour du petit axe, si F est $>\nu^2$. Dans le cas contraire, cette figure est un hyperboloïde de révolution autour de l'axe imaginaire. Les actions auxquelles les parties des fluides placées à la surface de la terre sont soumises diffèrent peu de l'action d'une force centrale proportionnelle à la distance, et la force centrifuge est fort

petite par rapport à cette force centrale; il en résulte que la figure affectée par la surface des mers approche beaucoup d'un ellipsoïde de révolution dont le rayon à l'équateur excède le rayon au pôle d'une fort petite quantité.

331. Cherchons la pression hydrostatique en un point d'un liquide composé de couches de différente densité ; la formule

$$dp = \rho\,(\mathrm{X}dx + \text{etc.})$$

se réduit à

$$dp = g\rho\,du\,,$$

en supposant l'axe des x vertical : si nous désignons par π la première extérieure, par pp' les pressions hydrostatiques exercées sur les différentes couches, $\rho,\rho'\ldots$ leur densité et $hh'\ldots$ leurs hauteurs, en intégrant l'équation précédente, on en tirera pour un point de la première couche

$$p - \pi = g\rho(x - x_0) = g\rho x\,,$$

et si on intègre entre les limites de la couche

$$p - \pi = g\rho h \quad \text{ou} \quad p = \pi + g\rho h\,,$$

pour la deuxième couche on aura

$$p' - p = g\rho'(x - h)\,,$$

et si on va jusqu'à la limite inférieure de cette couche, comme pour ce point

$$x = h' + h\,,$$

il viendra

$$p' = p + g\rho' h' = \pi + g\rho h + g\rho' h'\,,$$

ainsi de suite ; en sorte que pour la couche de l'ordre n on aura

$$p^n = \pi + g\rho h + g\rho' h' + \ldots + g\rho^n h^n.$$

Or, il est évident que la somme des termes qui renferment g, n'est autre chose que le poids d'un cylindre liquide vertical, dont la hauteur serait $h+h'+\ldots$ ou la hauteur du liquide au-dessus du point considéré, et pour base l'unité de surface ; en sorte que la pression est l'équivalent de ce cylindre augmenté de la pression atmosphérique, ou bien d'un autre cylindre qui se prolongerait jusqu'aux limites de l'atmosphère, ou bien encore, d'un cylindre liquide terminé à la surface libre de ce dernier, en supposant qu'on remplace la pression de l'atmosphère par une couche liquide dont le produit serait π.

On peut parvenir directement à cette formule. En effet, considérons un élément A d'une couche LM, et sur cet élément élevons un cylindre : l'équilibre ne sera pas troublé si nous supposons que ce cylindre se solidifie. Alors il sera pressé dans tous les sens ; mais les pressions horizontales se détruisent, et il suffit d'avoir égard aux pressions verticales, en appelant π la pression extérieure, et p la pression hydrostatique ; l'élément sera pressé de haut en bas par π, plus le poids du cylindre ; de bas en haut par p ; de plus le poids du cylindre est Fig. 98.

$$gA(\rho h+\rho' h+\ldots) ;$$

on a donc

$$A(p-\pi)=gA(\rho h+\rho' h'+\ldots), \quad \text{ou} \quad p=\pi+g\Sigma\rho,$$

du reste cette formule est comprise dans la formule plus générale

$$p=p_0+\Sigma\rho X\Delta x.$$

Lorsque $\pi=0$ cette formule devient

$$p=g\Sigma\rho h ;$$

mais on peut encore lui conserver cette forme, alors même que π n'est pas nul; car, comme nous l'avons observé, il suffit de remplacer la pression atmosphérique par une colonne liquide : de même $p=g\Sigma x$ est le poids d'une colonne supportée par l'unité de surface et prolongée jusqu'au vide. Ainsi on pourrait poser

$$pa=ga\Sigma\rho\Delta x,$$

parce que la densité de l'atmosphère varie avec la hauteur, c'est-à-dire avec x.

Fig. 99. 332. Considérons des liquides de densités différentes superposés dans deux vases communiquant par un canal, l'équilibre n'étant pas troublé si le liquide compris dans le canal vient à se solidifier, et alors l'équilibre devant avoir lieu dans chaque vase en particulier, les couches de séparation seront nécessairement planes; tout plan horizontal passant au-dessus du canal de communication, déterminera dans chaque liquide une tranche homogène, mais les deux tranches n'auront pas, en général, la même densité, tandis que tout plan horizontal qui coupera le canal de communication, déterminera une couche homogène dans toute son étendue; enfin, pour l'équilibre, les deux liquides devront exercer la même pression sur la base ab, en sorte que si π, π' sont les deux pressions extérieures, on aura

$$(1)\qquad \pi+g(\rho_0 h_0+\rho_1 h_1+\ldots)=\pi'+g(\rho h+\rho' h'+\ldots);$$

et de plus, si l'équilibre doit être stable, la superposition des liquides devra être faite dans l'ordre des densités.

Si le canal de communication se trouvait au-dessus de la base ab, alors on trouverait, comme nous ve-

nons de le faire, les conditions d'équilibre de la partie comprise au-dessus et dans le canal ; quant aux parties inférieures, on doit les considérer comme des liquides situés dans deux vases différents.

333. Si un seul liquide homogène était répandu dans les deux vases, et si de plus $\pi = \pi'$, alors l'équation précédente devient

$$\Sigma \rho h_0 = \Sigma \rho h \quad \text{ou} \quad h_0 = h\,;$$

ainsi les deux surfaces libres du liquide seront situées dans un même plan horizontal ; c'est là le *principe du niveau d'eau*.

334. Considérons un même liquide contenu dans deux vases communiquants, de manière que dans l'un des vases il est soumis à une pression extérieure π, et dans l'autre à une pression nulle, en appelant ρ sa densité, on aura dans le cas d'équilibre Fig. 100.

$$g\rho h = \pi + g\rho h_0\,, \quad \text{d'ou} \quad \pi = g\rho(h - h_0) = g\rho \mathrm{H}\,,$$

ce qui montre que, pour un même liquide, la hauteur au-dessus du niveau est proportionnelle à la pression extérieure. Un pareil appareil est ce qui constitue ce qu'on appelle un *baromètre*.

Nota. Dans le cas où l'on ne considère que deux liquides soumis à la même pression extérieure, l'équation (1) devient

$$g\rho_0(h_0 + h_1 + \ldots) = g\rho(h + h' + \ldots) \quad \text{ou} \quad g\rho_0 \mathrm{H}_0 = g\rho \mathrm{H}\,,$$

ou

$$\rho_0 \mathrm{H}_0 = \rho \mathrm{H}\,,$$

ce qui montre que les hauteurs sont en rapport inverse des densités.



CHAPITRE DEUXIÈME.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT DES CORPS FLOTTANTS.

§ Ier.

Équilibre d'un corps plongé en tout ou en partie dans des liquides pesants.

335. Nous allons faire voir d'abord que les pressions horizontales se détruisent; pour cela nous allons considérer les composantes horizontales de ces pressions.

Fig. 101. Concevons un cylindre horizontal circonscrit au corps solide et parallèle à l'axe des y, la courbe de contact divisera la surface en deux parties qu'on pourra concevoir divisées en un même nombre d'éléments qui auront les mêmes projections sur le plan des zx.

Considérons deux de ces éléments s et s' qui se projettent sur le même élément en b sur le plan des zx; les pressions hydrostatiques sont les mêmes sur un même plan horizontal, donc les pressions hydrostatiques en s,s' sont les mêmes et égales à p, donc les pressions sur ces éléments sont ps, ps', et alors b représentant la projection de ces éléments sur le plan des zx, la composante suivant l'axe des y de pression en s sera $-pb$, celle en s', $-pb$; il en sera de même de tous les éléments correspondants des deux surface S,S', par conséquent les pressions suivant l'axe des y sur les surfaces s, s' se détruisent.

Il en est de même des composantes, suivant l'axe des z; ainsi les pressions horizontales se détruisent. La résultante des pressions se réduit donc à celle des pressions verticales, c'est-à-dire suivant l'axe des x.

Pour avoir celle-ci, concevons un cylindre vertical, Fig. 102. circonscrit au corps solide et parallèle à l'axe des x, la courbe de contact divisera le corps en deux parties k,k' telles que leurs éléments auront deux à deux la même projection sur le plan des zx. Soient k,k' deux de ces éléments, et a leur projection commune sur le plan horizontal, x_0 étant l'abscisse du liquide correspondant à ces éléments, π la pression extérieure, la pression totale exercée sur k sera

$$pa = \pi a + ag\int_{x_0}^{x} \rho dx\,;$$

ce dernier terme est le poids du liquide depuis k jusqu'à x_0. La pression sur l'élément k' est de même

$$-p'a = -\pi a + ag\int_{x_0}^{x} \rho dx\,;$$

donc la résultante de ces deux pressions se réduit à

$$-(p'-p)a = -(ag\int_{x_0}^{x} \rho dx - ag\int_{x_0}^{x'} \rho dx = -ag\int_{x}^{x'} \rho dx\,;$$

c'est-à-dire que cette résultante est égale au poids du cylindre de liquide ayant a pour base, et pour hauteur $x'-x$, et est dirigée en sens contraire; il en serait de même pour tous les éléments des deux surfaces k,k', par conséquent pour la pression totale; la pression totale exercée par un fluide contre la surface d'un corps solide plongé dans ce fluide, est dirigée de bas en

haut et égale au poids du liquide déplacé par ce corps, et par conséquent passe au centre de gravité de ce fluide, ou au centre de figure si le liquide est homogène.

La même chose s'applique au cas où le corps ne plonge qu'en partie.

Donc, pour qu'un corps plongé, en tout ou en partie, dans ce liquide, soit en équilibre, il faut que *le poids du fluide déplacé soit égal au poids du corps, et que le centre de gravité du corps et celui du fluide déplacé soient sur la même verticale.*

Ces résultats auraient pu s'obtenir immédiatement. En effet, quand un fluide homogène se compose de couches horizontales homogènes et en équilibre dans un vase, en considérant une portion de ce liquide solidifiée, ce solide restera en équilibre; la résultante des pressions du fluide contre la surface de ce corps est donc une force verticale dirigée de bas en haut, égale au poids du liquide solidifié; c'est cette résultante qu'on nomme *poussée du liquide.*

On voit que selon que la densité du corps sera $\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}$ que celle du fluide, il surnagera, ou bien s'y trouvera partout en équilibre, ou bien tombera au fond du fluide.

Quand le corps est homogène et entièrement plongé dans un liquide homogène, alors les centres de gravité coïncident; en sorte que le corps montera ou descendra selon que sa densité sera plus petite ou plus grande que celle du fluide, d'où l'on déduit qu'un corps pesé dans un fluide perd une partie de son poids, égale au poids du fluide qu'il déplace.

§ II.

Pression d'un liquide pesant sur une surface plane. Centre de pression.

336. Considérons d'abord une surface verticale ABM dans le plan des xy. Fig. 103.

La pression en chaque point est normale à cette surface; la résultante des pressions l'est donc aussi. Le point d'application de cette dernière est ce qu'on nomme *centre de pression.*

Soient AB, CD deux horizontales très-voisines tracées sur la surface ABM, l'une ayant x pour abscisse, l'autre $x+\Delta x$; si u est la longueur AB, $u\Delta n$ sera sensiblement l'aire de ABCD, et la pression totale sur cette aire sera sensiblement $pu\,\Delta x$, puisque la pression hydrostatique est sensiblement constante dans la couche de niveau infiniment mince ABCD; le centre de pression de cette aire sera à peu près en son milieu; puisqu'elle est sensiblement homogène; M, N étant les points le plus haut et le plus bas de la courbe, et $y=f(x)$ $Y=F(x)$ désignant les équations des courbes NAM, NBM, les coordonnées du milieu de AB seront x, et

$$\frac{f(x)+F(x)}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{Y+y}{2},$$

et par suite ce seront là les coordonnées du centre de pression de l'aire ABCD.

La pression totale sur l'aire ANBM sera

$$P=\Sigma pu\Delta x=\int_{x_0}^{x_1} pudx \quad \text{ou} \quad (1)\quad P=\int_{x_0}^{x_1} p(Y-y)dx.$$

Soient ξ η les coordonnées du centre de pression, ces coordonnées se déterminent comme celles du centre des forces parallèles ; donc

$$P\xi = \Sigma pux\Delta x = \int_{x_0}^{x_1} puxdx \quad \text{ou} \quad P\xi = \int_{x_0}^{x_1} p(Y-y)dx\,;$$

de même

$$P\eta = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x'} (Y+y)pudx = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x'} (Y^2-y^2)pdx\,;$$

il viendra donc, au moyen de la valeur de P,

$$(3)\quad \xi = \frac{\int_{x_0}^{x'} p(Y-y)xdx}{\int_{x_0}^{x'} p(Y-y)\,dx} \qquad (3)\quad \eta = \frac{1}{2}\,\frac{\int_{x_0}^{x'} p(Y^2-y^2)dx}{\int_{x_0}^{x'} p(Y-y)dx}.$$

Ainsi, l'on connaît les coordonnées du centre de pression, et la pression totale exercée sur une surface verticale.

Passons à une surface inclinée. Nous prendrons pour plan des xy un plan parallèle aux horizontales de la surface ; ces lignes s'y projetteront en toute grandeur ; la direction de la pression totale sur la projection de la surface inclinée sera la direction de la composante de la pression totale sur cette surface suivant l'axe des z ; les valeurs de ξ, η de la projection seront les valeurs (2) et (3) ; ces valeurs sont les mêmes pour la surface elle-même, puisque les horizontales $a=(Y-y)$ sont égales de part et d'autre.

Les équations (2) et (3) donnent aussi les coordonnées du centre de pression de la surface inclinée ; ce centre sera entièrement déterminé.

Lorsque tous les milieux des tranches horizontales sont sur une même droite, comme dans un triangle, etc., dont la base est horizontale, le centre de pression se trouve lui-même sur cette droite, et alors il suffit de la valeur des ξ pour la détermination de ce centre.

Quant à la pression totale, elle est toujours

$$\mathrm{P}=\int_{x_0}^{x'} pudx.$$

Lorsqu'il s'agit d'un liquide homogène, les valeurs de ξ et η se simplifient, car P peut toujours se mettre sous la forme $g\varphi x$, qu'il y ait une pression extérieure ou non. On a alors

$$\xi=\frac{\int_{x_0}^{x'} ux^2dx}{\int_{x_0}^{x'} uxdx}.$$

Comme nous l'avons vu, cette valeur suffit lorsque les milieux de toutes les horizontales sont sur une même droite. Nous allons examiner quelques cas particuliers.

Pour un parallélogramme dont les bases sont horizontales et ont pour abscisses x_0 et x_1, les bases sont parallèles au plan des xy; mais le plan du triangle peut être incliné. u est constant pour ce parallélogramme ; il vient donc Fig. 104.

$$\xi=\frac{\int_{x_0}^{x'} x^2dx}{\int_{x_0}^{x'} xdx}=\frac{\frac{1}{3}(x_1^3-x_0^3)}{\frac{1}{2}(x_1^2-x_0^2)}=\frac{2}{3}\,\frac{x_1^2+x_0x_1+x_0^2}{x_1+x_0}.$$

2° Pour un triangle dont la base horizontale est parallèle à l'axe des y,

b étant la base, on a

$$\frac{u}{b}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0},\quad u=b\,\frac{(x-x_0)}{x_1-x_0},$$

d'où

$$\xi=\frac{\int_{x_0}^{x_1} x^2(x-x_0)dx}{\int_{x_0}^{x_1} x(x-x_0)dx}.$$

Au lieu d'intégrer immédiatement, changeons la variable, et posons

$$x-x_0=(x_1-x_0)\alpha,$$

alors, pour $x=x_0$ $\alpha=0$ et pour $x=x_1$ $\alpha=1$, d'où

$$\xi=\frac{\int_0^1 x^2\alpha d\alpha}{\int_0^1 x\alpha d\alpha}=\frac{\int_0^1 \alpha(x_0^2+2x_0(x_1-x_0)\alpha+(x_1-x_0)^2\alpha^2)d\alpha}{\int_0^1 \alpha(x_0+(x_1-x_0)\alpha)d\alpha}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}x_0^2+\frac{2}{3}x_0(x_1-x_0)+\frac{1}{4}(n-x_0)^2}{\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{3}(x_1-x_0}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{bx_0^2+8x_0(x_1-x_0)+3(x_1-x_0)^2}{3x_0+2(x_1-x_0)},$$

ou

$$\xi=\frac{1}{2}\,\frac{x_0^2+2x_0x_1+3x_1^2}{x_0+2x_1}:$$

ce résultat est indépendant de l'inclinaison du triangle sur le plan des xy.

Fig. 106. 337. Il serait facile d'avoir le centre de pression

pour un triangle quelconque ABC. On le divise en deux par une droite BD parallèle à l'axe des y : on détermine pour le triangle ABD l'abscisse ξ du centre de pression, et la pression P exercée sur ce triangle. De même, pour le triangle BDC, on aura aussi ξ' et P_1; ainsi, en vertu de la composition des forces parallèles, on aura pour l'abscisse Ξ du centre de pression de ABC

$$\Xi = \frac{P\xi + P'\xi'}{P + P'}.$$

Enfin, ayant déterminé la pression et le centre de pression pour un triangle quelconque, on déterminera facilement le centre de pression d'un polygone quelconque; il suffit de le diviser en triangles; alors, en désignant par P', P'', P'''... les pressions sur ces triangles, et ξ', ξ''... les abscisses des centres de pression correspondants, on aura

$$\Xi = \frac{P'\xi' + P''\xi'' + \ldots}{P' + P'' + \ldots}.$$

338. Considérons un cercle incliné sur le plan des xy, nous ferons entrer ici cette inclinaison dans le calcul; mais elle disparaîtra dans le résultat définitif. Fig. 107.

Nous avons généralement

$$\xi = \frac{\int_{x_0}^{x_1} ux^2dx}{\int_{x_0}^{x_1} uxdx},$$

représentons par τ l'angle du cercle avec une perpendiculaire au plan xy, par h l'abscisse du centre C, r son rayon, nous allons remplacer x par un autre variable ω angle de CD avec le rayon mené à un point A dont l'abscisse est x.

D'abord nous avons

$$u = Am = 2AB, \quad AB = r\cos.\omega\,,$$

donc

$$u = 2\,r\cos.\omega.$$

Déterminons maintenant x en fonction de ω, nous avons $CB = z\sin.\omega$, et la projection de CB sur le plan des xy est $x-h$; d'un autre côté cette projection est $r\sin.\tau\sin.\omega$; donc $x-h = r\sin.\tau\sin.\omega$; on tire de là

$$dx = r\sin.\tau\cos.\omega d\omega$$

et

$$udx = 2r^2\sin.\tau\cos.^2\omega d\omega\,;$$

par conséquent, en remarquant que depuis s jusqu'à T, ω varie depuis $-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\frac{\pi}{2}$ on aura

$$\xi = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos.^2\omega d\omega}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos.^2\omega d\omega}\,;$$

en remplaçant maintenant x par sa valeur

$$h + r\sin.\tau\sin.\omega\,,$$

le dénominateur devient

$$h\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos.^2\omega d\omega + r\sin.\tau\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin.\omega\cos.^2\omega d\omega.$$

Le dernier terme revient à

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos.^2 \omega d\omega\,;$$

qui est nul; donc le dénominateur se réduit à

$$h\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos.^2 \omega d\omega\,,$$

quant au numérateur, il devient

$$h^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos.^2 \omega d\omega + 2hr\sin.\tau \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin.\omega \cos.^2 \omega d\omega + r^2 \sin^2\tau$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin.^2 \omega \cos.^2 \omega d\omega\,;$$

l'intégrale du milieu est encore nulle; de sorte qu'en substituant, la valeur de ξ devient

$$\xi = h + \frac{r^2 \sin.^2 \tau}{h} \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin.^2 \omega \cos.\omega d\omega}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos.^2 \omega d\omega}$$

$$=h+\frac{r^2\sin.^2\tau}{4h}\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2\omega)d\omega}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos.^2\omega d\omega},$$

en vertu de

$$\sin.2\omega=2\sin.\omega\cos.\omega,$$

ou bien encore

$$\xi=h+\frac{r^2\sin.\tau}{4h}\frac{\int_{o}^{\frac{\pi}{2}}\sin.^2(2\omega)d\omega}{\int_{o}^{\frac{\pi}{2}}\cos.^2\omega d\omega},$$

en remarquant que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos.^2\omega d\omega=2\int_{o}^{\frac{\pi}{2}}\cos.^2\omega d\omega\,;$$

maintenant il sera facile d'intégrer. En effet, on a

$$\cos.2\omega=\cos.^2\omega-\sin.^2\omega=1-2\sin.^2\omega$$

ou

$$\cos.4\omega=1-2\sin.^2(2\omega),\ \sin.^2(2\omega)\pm\frac{1-\cos.4\omega}{2}\,;$$

ainsi,

$$\int\sin.^2(2\omega)=\frac{1}{2}\int(1-\cos.4\omega)d\omega=\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{8}\sin.4\omega+c\,;$$

de plus, en vertu de

$$\cos.\omega = \frac{1+\cos.2\omega}{2},$$

on a encore

$$\int \cos.^2\omega d\omega = \frac{1}{2}\int 1\cos.2\omega) d\omega = \frac{1}{2}\,\omega + \frac{1}{4}\,\sin.2\omega + C\,,$$

entre les deux limites $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$; ces deux intégrales deviennent chacune $\frac{\pi}{4}$; par conséquent

$$\xi = h + \frac{r^2\sin.^2\tau}{4h};$$

en effet, le centre de pression doit être plus bas que le centre de gravité.

339. Quand le cercle touche par sa partie supérieure la surface du liquide, on a $r\sin.\tau = h$; donc alors Fig. 108.

$$\xi = h + \frac{1}{4}\,h = \frac{5}{4}\,h,$$

en sorte que o étant le centre de pression, on a

$$\xi - h = co = \frac{1}{4}\,ek = \frac{1}{4}\,r,$$

résultat remarquable.

§ III.

Conditions de la stabilité des corps flottants.

340. M étant la masse d'un corps, v le volume du liquide qu'il déplace, ρ la densité de ce liquide homogène, puisqu'il faut, pour qu'il y ait équilibre, que le

poids du liquide déplacé soit égal au poids du corps, on aura pour condition

$$g\rho v = gM \quad \text{ou} \quad \rho v = M.$$

Si la densité du liquide est > que la densité moyenne du corps, v sera à son tour plus petit que le volume du corps, et le corps ne plongera qu'en partie dans le liquide; il faut de plus pour l'équilibre que le centre de gravité G du corps, et le centre de gravité O du liquide déplacé, soient sur la même verticale.

Il y a évidemment une infinité de manières de satisfaire à l'équilibre d'un corps flottant : car la première condition d'équilibre sera satisfaite toutes les fois qu'on aura $v = \frac{M}{\rho}$, ce qui peut avoir lieu de mille manières; car cela revient à couper le corps par un plan tel qu'en le faisant coïncider avec la surface du liquide, le poids du liquide déplacé par la partie inférieure du corps soit égal au poids du corps ; un pareil plan se nomme plan de *flottaison*. Pour chaque plan de flottaison, il y a un centre de gravité O du liquide déplacé; le lien géométrique de tous ces centres forme une certaine surface tracée dans le corps flottant; nous allons voir quels sont les plans de flottaison qui conviennent à une position d'équilibre.

Fig. 109. Supposons que KL, K'L' sont deux plans de flottaison très-voisins; soient O, O' les points du corps, centres de gravité, correspondants du liquide déplacé, les parties plongées du corps dans les deux cas auront la partie commune

$$KIRLM = V - v,$$

v étant le volume d'un des onglets KK'CR, ou LRL'L.

Soient C,C′ les centres de gravité des deux onglets, S celui du volume $V-v$, le centre de gravité O sera donné par la proportion

$$\frac{CO}{OS}=\frac{V-v}{v},$$

le centre de gravité O′ sera de même déterminé par

$$\frac{O'C'}{O'S}=\frac{V-v}{v}, \text{ d'où } \frac{CO}{OS}=\frac{C'O'}{O'S},$$

ce qui dit que la ligne OO′ est parallèle à CC′. Or les onglets étant très-petits, les centres de gravité C,C′, peuvent être considérés comme situés sensiblement dans l'un ou l'autre des plans de flottaison, et par conséquent dans le plan de flottaison KL; la ligne OO′ sera donc parallèle au plan de flottaison. Cela est rigoureusement vrai à la limite; alors OO′ est tangente en O à la surface des points O, et comme cela a lieu, quel que soit le sens dans lequel on a fait tourner le plan de flottaison d'une quantité très-petite, il en résulte que toutes les tangentes en O sont parallèles à ce plan; donc le plan tangent en un point quelconque O de la surface des centres de gravité, est parallèle au plan de flottaison correspondant.

Il résulte de là que G étant le centre de gravité du corps, la ligne GO est normale en O à la surface du point O; car dans le cas d'équilibre, cette ligne étant verticale, est perpendiculaire au plan de flottaison qui est horizontal, et par suite aussi au plan tangent en O qui est parallèle au plan de flottaison. Fig. 110.

D'après cela, si l'on conçoit tracée la surface des points O, en menant du point G toutes les normales

possibles à cette surface, on déterminera autant de points O qu'il y a de normales, et par suite autant de plans deflottaison correspondants pour lesquels le corps flottant sera en équilibre.

341. Nous allons considérer comme cas particulier un corps divisible en deux parties symétriques par un plan vertical; on le fait tourner sur lui-même de manière que ce plan reste vertical et que l'on ait toujours $V=\frac{M}{\rho}$; ce dernier volume étant également divisé en parties symétriques par le plan vertical, son centre de gravité ne sortira pas de ce plan et y trouvera une courbe A B C, qui est l'intersection de la surface générale des points O par le plan vertical; si donc on abaisse du point G des normales sur cette courbe, à chacune d'elles correspondra une portion d'équilibre du corps.

Il est à remarquer que ces normales seront alternativement des maxima et des minima, parmi les rayons vecteurs menés de G à la courbe A B C. En effet,

Fig. 111. Soient GO l'une de ces normales, M le centre de courbure de O et placé d'abord au-dessous de G, le cercle osculateur en O' étant à la fois intérieur et extérieur à la courbe, le cercle décrit du point G sera entièrement intérieur à cette courbe dans le voisinage du point O : la normale GO sera donc minima entre les rayons vecteurs menés de G aux points de la courbe voisine de O $GO < GO' < GO''$.

Si le centre de courbure M était au-dessous de G, on verrait que GO est maximum entre les rayons vecteurs voisins $GO > GO' > O''$, puisque le cercle décrit de G sera entièrement extérieur à la courbe.

D'après cela toutes les normales abaissées de G sur

la courbe, sont des maxima et minima entre les divers rayons vecteurs menés de G ; de plus elles seront alternativement des maxima et minima, puisque entre deux maximum il y a nécessairement un minimum, et un maximum entre deux minimum. Enfin la courbe ABC étant formée, il y a nécessairement autant de maxima que de minima, et le nombre des positions d'équilibre du corps flottant est pair.

Quand le corps flottant est en équilibre, le centre de courbure M s'appelle *métacentre*.

342. Voyons maintenant dans quel cas l'équilibre est stable et instable.

D'abord si le métacentre est au-dessus du centre de gravité, l'équilibre est stable; car si l'on déplace le système de manière que le centre de gravité O vienne en O′ très-voisin de O, la normale au point O′ passera en M, puisque ce point est l'intersection de deux normales voisines. Le poids appliqué en G sera parallèle à MO′, et il est évident que l'effet des deux forces GL, MK, tend à ramener les deux points M et G dans leur première position. Fig. 112.

Au contraire, lorsque le métacentre est au-dessous du centre de gravité, c'est-à-dire lorsque la normale est au maximum, l'équilibre est instable ; car si on dérange très-peu la position d'équilibre, l'effet des forces MK, GL, est de ramener G, M, dans une position verticale; mais G est au-dessous de M, par suite à faire chavirer le corps. Donc, etc.

On voit que les *positions d'équilibre stable correspondent aux normales minima, et celles d'équilibre instable aux normales maxima.*

Les positions d'équilibre stable et instable se succèdent donc alternativement.

343. Si, comme application, on considère un cylindre droit plongé dans un liquide et ayant ses arêtes horizontales, le plan vertical mené à égale distance des bases perpendiculaires aux arêtes coupera le cylindre en deux parties symétriques; il est évident que, dans ce cas, la courbe décrite par le centre de gravité dans le plan vertical sera un cercle; il y aura une infinité de positions d'équilibre.

344. Considérons le cas d'un prisme triangulaire, que l'on fait tourner de manière que ses arêtes restent horizontales; il nous sera facile de trouver le chemin parcouru par le centre de gravité du liquide déplacé : ce chemin sera tracé dans le plan vertical mené à égale distance des bases du prisme.

Fig. 113. Supposons d'abord qu'une seule arête C plonge dans le liquide, ABC étant la section faite à égale distance des bases dans le prisme, DEC la section du prisme de liquide déplacé, le centre de gravité du prisme total sera en G centre de gravité de ABC, celui du liquide déplacé en O centre de gravité de la section DEC; pendant que le prisme tourne sur lui-même, la section DEC doit rester constante, pour que le poids du liquide déplacé reste le même; il est facile de voir que dans ce mouvement le centre de gravité O décrira une hyperbole; en effet, AC, BC, étant pris pour axes des y et x, on aura pour les coordonnées de O

$$x = \frac{1}{3}\,\text{CD},\ y = \frac{1}{3}\,\text{CE},\ \text{d'où}\ \ xy = \frac{1}{9}\,\text{CE}\times\text{CD};$$

Or, la surface constante DEC, ou

$$B=\frac{1}{2}\,CE-DC.\sin.\alpha\,;$$

donc

$$xy=\frac{2}{9\sin.\alpha}B.$$

La courbe en question est donc une hyperbole, dont AC et BC sont les asymptotes.

Il en serait de même si l'une des arêtes A ou B plongeait dans le liquide; on aurait deux nouvelles portions d'hyperbole décrites par le centre de gravité du liquide déplacé.

Il est encore facile d'avoir la courbe décrite quand deux arêtes A et B, par exemple, plongent dans le liquide; la surface DEBA devant rester constante dans le mouvement du prisme, la surface CDE sera aussi constante; le centre de gravité F de CDE décrira donc, en vertu de ce qui précède, une hyperbole dont AC et BC sont les asymptotes. O étant le centre de gravité de ADEB, le centre de gravité G du triangle total ABC s'obtiendra en divisant OF en deux parties telles que Fig. 114.

$$\frac{GO}{GF}=\frac{CDE}{ADEB};$$

les deux termes de ce rapport étant constants, on voit que dans toutes les portions du prisme flottant le rapport des rayons vecteurs GO, GF, sera constant; la courbe de O sera donc une courbe semblable à celle de F; elle sera donc aussi une hyperbole, mais inversement placée.

Par les points C et G menons la droite CGC′ telle qu'on ait Fig. 115.

$$\frac{GC}{GC'}=\frac{GF}{GO};$$

de même pour les sommets B et A. On obtiendra ainsi un triangle A'B'C', dont les côtés sont parallèles à ceux de ABC, et dont les sommets sont sur les droites qui joignent les sommets du triangle donné au centre de gravité G ; en outre, on peut démontrer que si on mène les cordes qui joignent les points de raccordement de nos six courbes, l'hexagone formé a ses six côtés respectivement parallèles aux côtés de nos deux triangles ; enfin, que les diagonales de cet hexagone se coupent toutes au centre de gravité G.

On voit qu'il y aura six portions d'hyperbole décrites par le centre de gravité du liquide déplacé ; aux points qu'elles auront de communs elles seront tangentes l'une à l'autre, car en chaque point d'une des courbes la tangente devant être parallèle à la ligne de flottaison DE, les tangentes au même point devront se confondre en une seule : les deux courbes seront donc tangentes.

Il y aura autant de positions d'équilibre que l'on pourra abaisser de normales du point G sur toutes les hyperboles ; or, sur une portion d'hyperbole, on peut au plus en abaisser trois ; il y aura donc au plus dix-huit positions d'équilibre.

Lorsque le triangle est équilatéral, les positions d'équilibre se ramènent à trois.

345. Cherchons maintenant la condition analytique de la stabilité et de l'instabilité des corps flottants.

Fig. 116. Pour cela, nous allons démontrer généralement que le centre de gravité d'un plan de flottaison d'un corps homogène est, sur son intersection HI avec le

plan de flottaison infiniment voisin K'L'. En effet, soient Q et Q' les centres de gravité des aires

$$KHI'=A, \quad HIL=A',$$

le centre de gravité de KL s'obtiendra en divisant QQ' en deux parties réciproquement proportionnelles à ces aires A et A' : θ étant l'angle infiniment petit des deux plans de flottaison, r et r' les distances QR, Q'R' des centres de gravité Q, Q' à HI, comme on peut considérer les volumes des angles comme des solides de révolution, nous aurons par Guldin

$$KK'HI=A\,r\theta, \quad LL'HI=A'r'\theta;$$

or, ces deux volumes sont égaux, ainsi

$$r:r'::A':A;$$

et à cause des triangles semblables QRG, Q'R'G, on aura donc aussi

$$QG:Q'G::A':A;$$

le point G est donc le centre de gravité du plan de flottaison.

Ce théorème général démontré, revenons au cas où le corps flottant est divisé en deux parties symétriques par un plan vertical.

La ligne HI étant l'intersection de deux plans perpendiculaires au plan vertical, est elle-même perpendiculaire à ce plan, et, par suite, à toute droite menée dans ce plan, à QQ'; QQ' sera donc la somme des distances QR, Q'R', de Q et Q' à HI : soit a un petit élément de QHI, r sa distance HI, θar sera semblablement l'expression de l'élément de l'angle correspondant à cet élément a, or par Guldin le volume total de l'angle sera

$$v=\theta\Sigma ar, \qquad (1)$$

or, en vertu de la formule générale qui sert à déterminer le centre de gravité, on a

$$QG = \frac{\theta a r^2 + \theta' a r'^2}{\theta a r + \theta a' r'} = \frac{\theta \Sigma a r^2}{\theta \Sigma a r};$$

et si on pose

$$\Sigma a r^2 = k',$$

il vient, en vertu de (1),

$$QG = \frac{\theta k_1}{v}.$$

On aurait de même

$$Q'G = \frac{\theta k^2}{v},$$

et comme

$$QG + Q'G = QQ',$$

on a

$$QQ' = \frac{\theta (k_1 + k_2)}{v} = \frac{\theta k}{v},$$

K étant le moment d'inertie de la surface de flottaison par rapport à HI.

Fig. 117. Remarquons que o, o', étant les centres de gravité du liquide déplacé dont le volume est V, correspondants aux deux plans de flottaison KL, K'L', la ligne oo' est parallèle à QQ', et on a

$$\frac{QQ'}{oo'} = \frac{V}{v}; \text{ par conséquent } oo' = \frac{\theta k}{V};$$

de plus θ étant l'angle des deux plans de flottaison consécutifs, est aussi l'angle des deux normales Mo, Mo', et M étant le centre de courbure, le rayon de courbure

$$Mo = \frac{oo'}{\theta};$$

ou bien, en vertu de la valeur de oo',

$$Mo = \frac{k}{V}:$$

nous savons que la condition de stabilité est $Mo > oG$. Appelons h la distance oG des deux centres de gravité, la condition analytique de la stabilité sera $\frac{K}{V} > h$.

Nous allons maintenant exprimer cette condition en fonction des données dans des cas particuliers.

346. 1° Considérons un cylindre ou un prisme dont les arêtes sont horizontales, homogène et plongé dans un liquide homogène : le plan de flottaison sera un rectangle MNRL, dont un des côtés est égal à c longueur des arêtes, et l'autre b; la ligne HI le divisera en deux parties égales. Fig. 118.

Il est facile d'avoir le moment d'inertie de la surface de ce rectangle par rapport à HI. Soit pq une branche infiniment petite dont les ordonnées extrêmes sont y et $y + \Delta y$, l'aire de ce petit rectangle sera $a = c\Delta y$, le moment d'inertie de la moitié du rectangle sera

$$\Sigma a y^2 = c \Sigma y^2 \Delta y, \text{ ou } c \int_0^{\frac{b}{2}} y^2 dy = c\,\frac{b^3}{24},$$

et celui du rectangle entier

$$k = \frac{cb^3}{12};$$

d'ailleurs B étant la base du prisme on a

$$V = CB; \text{ d'ou } \frac{k}{V} = \frac{b^3}{12B}.$$

Ainsi la condition de stabilité est

$$\frac{b^3}{12.B} > h,$$

h étant la distance des centres de gravité des corps et du liquide déplacé.

Fig. 119. 347. 2° Supposons que le corps plongé soit un ellipsoïde pesant et homogène, toujours coupé en deux parties symétriques par un plan vertical.

Il est évident qu'on aura une position d'équilibre si l'un des axes est vertical. Voyons dans quels cas l'équilibre sera stable ou instable, le centre de gravité G étant à son centre.

Prenons pour axes de coordonnées les trois axes de cet ellipsoïde : son équation sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,;$$

celle du plan de flottaison

$$x = GI = H\,:$$

la surface de flottaison est une ellipse dont l'équation est

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{H^2}{a^2},$$

ou

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{H^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{H^2}{a^2}\right)} = 1,$$

ou

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1,$$

en posant

$$b^2\left(1 - \frac{H^2}{a^2}\right) = B^2, \quad c^2\left(1 - \frac{H^2}{a^2}\right) = C^2.$$

Considérons une tranche pq de cette ellipse. Son épaisseur est Δy, sa longueur $2z$, son aire est donc Fig. 120.

$$2z\Delta y\text{, ou } \frac{2C}{B}\sqrt{B^2-y^2}\,\Delta y;$$

le moment d'inertie de la $\frac{1}{2}$ ellipse KL sera

$$\frac{2C}{B}\,z\sqrt{B^2-y^2}.y^2\Delta y,$$

ou, à la limite,

$$\frac{2C}{B}\int_0^B \sqrt{B^2-y^2}.\,y^2dy;$$

le moment d'inertie de la surface entière de flottaison sera donc

$$k=\frac{4C}{B}\int_0^B \sqrt{B^2-y^2}.\,y^2dy.$$

Pour effectuer l'intégration, posons $y=B\sin.\alpha$; alors pour

$$y=0,\ \alpha=0,\quad \text{pour } y=B,\ \alpha=\frac{\pi}{2},$$

d'où

$$dy=B\cos.\alpha d\alpha,\ \sqrt{B^2-y^2}=B\sqrt{1-\sin.^2\alpha}=B\cos.\alpha;$$

donc

$$k=4B^3C\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin.^2\alpha\cos.^2\alpha d\alpha=B^3C\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin.^2(2\alpha)\,d\alpha;$$

et, comme nous le savons, cette intégrale est égale à $\frac{\pi}{4}$; donc

$$k=\frac{\pi}{4}B^3C=\frac{\pi}{4}b^3c\left(1-\frac{H^2}{a^2}\right)^2=\frac{\pi}{4}\,\frac{b^3}{a^3}\,\frac{bc}{a^2}(a^2-H^2)^2.$$

Il reste à avoir la valeur de V. La distance h des deux centres de gravité est égale à l'abscisse ξ du centre de gravité du liquide déplacé ; la condition de stabilité est donc

$$\frac{k}{V} > \xi \text{ ou } k > V\xi;$$

or

$$V = \int_H^a U dx,$$

U étant l'aire d'une section quelconque parallèle au plan yz,

$$V\xi = \int_H^a U x dx,$$

l'aire

$$U = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

donc

$$V\xi = \pi bc \int_H^a x\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx,$$

intégrale qui se réduit à

$$V\xi = \frac{\pi}{4}\ \frac{bc}{a^2}(a^2 - H^2)^2.$$

Comparant cette valeur à celle de K, on voit que

$$\frac{k}{V\xi} = \frac{b^2}{a^2};$$

il y aura donc stabilité d'équilibre dans le sens des y si $b > a$, c'est-à-dire si l'axe horizontal des y est plus grand que l'axe des x; de même il y aura stabilité dans le sens des z si $c > a$: pour qu'un ellipsoïde soit dans un

équilibre stable, il faut donc que l'axe vertical soit le plus petit des trois axes.

§ IV.

Oscillations d'un corps flottant symétrique par rapport à une section verticale. Fig. 121.

348. Soient KLp la section verticale par rapport à laquelle le corps est symétrique, KL la trace d'un plan de flottaison correspondant à une position d'équilibre stable; supposons que le corps soit écarté d'une très-petite quantité de sa position d'équilibre : il y reviendra par de petites oscillations. Soit $K''L''$ la trace de la surface supérieure du liquide sur le plan vertical au bout du temps t. Par le point I, centre de gravité de KL, menons le plan $K'L'$ parallèle à $K''L''$: ce plan étant très-peu éloigné de KL, et passant par son centre de gravité, sera un plan de flottaison, le volume au-dessous de $K'K'$ sera donc le même que celui au-dessous de KL : appelons ε la distance IN des deux plans $KL, K''L''$.

Comme nous le savons, le mouvement du corps est déterminé par le mouvement du centre de gravité G, dans lequel on a concentré toute la masse M du corps, et sollicité par toutes les forces qui agissent sur ce corps, et de plus par le mouvement de rotation autour du centre de gravité, ce mouvement s'effectuant autour d'un axe passant par G, et de plus parallèle à l'axe des z, puisque la section KLP ne sort du plan vertical des xy.

Or, toutes les forces qui sollicitent le corps sont verticales; de plus on suppose qu'il n'y a pas de vitesse initiale; le mouvement du centre de gravité G sera

donc rectiligne et vertical; l'équation de son mouvement sera donc de la forme

$$M \frac{d^2\xi}{dt^2} = X.$$

Il s'agit de déterminer X ; cela n'offre pas de difficulté. En effet, quand K″L″ coïncide avec la surface supérieure du liquide, la poussée est égale au poids du liquide déplacé par K″L″P. Ce poids se compose du poids $g\rho V$ du liquide déplacé par K′C′P, et appliqué en o'; plus du poids compris dans K′L′K″L″, qu'on peut assimiler à un cylindre ayant r pour hauteur et pour base K′L′= sensiblement KL=A; ce poids est donc $g\rho A\iota$, et peut sans erreur être considéré comme appliqué en I. Au bout du temps ι, la poussée du liquide sera donc $g\rho(V+A\iota)$; elle agit de bas en haut; le poids du corps est égal au poids $g\rho V$ du liquide déplacé par KLp. Toutes ces forces doivent être considérées comme appliquées au centre de gravité G ; elles agissent en sens contraire; leur différence $g\rho A\iota$ est donc la force qui sollicite le centre de gravité : on a donc

$$X = -g\rho A\iota,$$

puisqu'elle agit de bas en haut; de là

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = -g\rho A\iota \quad \text{ou} \quad \frac{V d^2\xi}{dt^2} = -gA\iota\,;$$

et si pour simplifier nous posons

$$\frac{V}{A} = \frac{1}{H},$$

(H est ce qu'on appelle la hauteur moyenne de KLP) l'équation du mouvement du centre de gravité sera

$$(1) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{g\iota}{H}.$$

L'oscillation du corps flottant est déterminée par les variations de ε et θ angle des deux plans KL, K″L″, ou KL, K′L′ : nous avons à déterminer deux équations entre ε, θ et t : l'équation (1) va nous en fournir une. Fig. 122.

Posons

$$GI = f, \quad IF = b, \quad FG = a, \quad FGI = \delta;$$

au bout du temps t on a

$$\xi = GE = \varepsilon + GH; \quad \text{or} \quad HGF = \theta;$$

par suite,

$$HGI = \delta + \theta \quad \text{et} \quad GH = f\cos.(\delta + \theta);$$

or

$$\cos.(\delta+\theta) = \cos.\delta\cos.\theta - \sin.\delta\sin.\theta = \cos.\delta - \theta\sin.\delta,$$

en remarquant que θ est très-petit ; on a donc

$$GH = f\cos.\delta - \theta f\sin.\delta = a - b\theta;$$

donc

$$\xi = \varepsilon + a - b\theta,$$

et différenciant

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} - b\frac{d^2\theta}{dt^2};$$

et en vertu de (1) il vient

$$(2) \qquad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} - b\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g\varepsilon}{H} = 0:$$

telle est l'une des équations qui lient ε, θ, t. Si on avait $b = 0$, c'est-à-dire si les points I et G se trouvaient sur une même verticale pendant le mouvement, on aurait immédiatement une équation entre ε et t

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -\frac{g\varepsilon}{H},$$

qu'il est facile d'intégrer, car on peut l'écrire ainsi :

$$\frac{1}{dt}d\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{g\varepsilon}{\mathrm{H}},$$

ou

$$\frac{d\varepsilon}{dt}\,d\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{g\varepsilon}{\mathrm{H}}d\varepsilon;$$

et intégrant à partir de $t=0$.

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2=-\left(\frac{q}{\mathrm{H}}\right)(\varepsilon^2-\varepsilon_0^2);$$

$\frac{d\varepsilon}{dt}$ a une valeur initiale nulle, car $\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{d\xi}{dt}$, et la vitesse initiale du centre de gravité est nulle ; de là

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\pm\left(\frac{g}{\mathrm{H}}\right)^{\frac{1}{2}}(\varepsilon_0^2-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\quad\frac{d\varepsilon}{(\varepsilon_0^2-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}=\pm\left(\frac{g}{\mathrm{H}}\right)^{\frac{1}{2}}dt;$$

intégrant encore à partir de $t=0$,

$$ar\cos.\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}=\pm\left(\frac{g}{\mathrm{H}}\right)^{\frac{1}{2}}t,\quad\text{ou}\quad\varepsilon=\varepsilon_0\cos.\left(\frac{g}{\mathrm{H}}\right)^{\frac{1}{2}}t,$$

équation semblable à celle qui lie θ et t dans le pendule simple.

La longueur ε varie donc comme θ dans le pendule simple ; le point I oscille comme un pendule simple ; le temps d'une oscillation complète s'obtient en posant $\varepsilon=\varepsilon_0$, d'où

$$\cos.\left(\frac{g}{\mathrm{H}}\right)^{\frac{1}{2}}t=1,\quad\left(\frac{g}{\mathrm{H}}\right)^{\frac{1}{2}}t=2\pi,\quad\text{d'où}\quad t=2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{g}}.$$

La deuxième équation qui lie ε, θ et t s'obtiendra au moyen de la deuxième équation du mouvement du corps, celle du mouvement autour du centre de gravité ; comme nous l'avons déjà dit, ce mouvement s'effectue autour d'une parallèle à l'axe des z, son équation est donc

$$\Sigma m\left(x_{,}\frac{d^2y_{,}}{dt^2}-y_{,}\frac{d^2x_{,}}{dt^2}\right)=\Sigma(x_{,}Y-z_{,}X),$$

$x_{,}y_{,}z_{,}$ étant les coordonnées relatives à des axes passant par le centre de gravité et parallèles aux premières.

Le premier membre de cette équation est la différentielle de la somme des projections des moments linéaires, de la quantité de mouvement sur l'axe des z, et le deuxième la somme des projections des moments linéaires des forces sur le même axe. Ces deux expressions sont faciles à trouver ; car soit m un élément quelconque du corps, il décrira autour de G un arc $S=r(\theta_0-\theta)$, r étant sa distance à G ou à l'axe des z, car tous les points décrivent autour de G un angle $\theta_0-\theta$ dans le temps t ; on aura donc Fig. 123.

$$\frac{ds}{dt}=-r\frac{d\theta}{dt};$$

la quantité de mouvement de m est donc

$$-mr\frac{d\theta}{dt},$$

et la projection de son moment linéaire sur l'axe des z

$$-mr^2\frac{d\theta}{dt};$$

la différentielle de cette projection est donc

$$-mr^2\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

et la somme de toutes ces projections, c'est-à-dire le premier membre de (3),

$$(4)\qquad -\frac{d^2\theta}{dt^2}\Sigma mr^2=-MR^2\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

R étant une moyenne entre toutes les valeurs de r. Le deuxième membre s'obtient aussi aisément; en effet, les trois forces qui sollicitent le système sont gM en G, $g\rho$ de haut en bas, $g\rho V$ en o' de bas en haut, et $g\rho A\epsilon$ en I *idem*. Toutes sont verticales, et pour toutes $Y=0$; pour celles en G $X=g\rho V$, en o' $X=-g\rho V$, en I, $X=-g\rho A\epsilon$; le moment de la première est nul; les moments de ces deux dernières sont

$$g\rho V GQ, \quad g\rho A\epsilon . HI,$$

GQ étant la distance de la direction $o'M$ au centre des moments. Or

$$GQ = GM \sin.\theta = GM\theta,$$

et comme

$$GM = Mo \pm Go = \frac{K}{V} \pm h,$$

$\mp$ selon que G est au-dessus ou au-dessous de o; donc

$$GQ = \left(\frac{K}{V} \pm h\right)\theta;$$

de plus

$$HI = f \sin.(\delta + \theta) = \text{sensiblement} f \sin.\delta = b,$$

la somme des moments linéaires des forces projetées sur l'axe des z est donc

(5) $$g\rho V\left(\frac{K}{V} \mp h\right)\theta + g\rho A b\epsilon;$$

donc, égalant cette expression à l'expression (4) en vertu de (3), il vient

$$-MR^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = g\rho V\left(\frac{K}{V} + h\right)\theta + g\rho A b\epsilon;$$

et remarquant que

$$\frac{M}{S}=V,\ \frac{A}{V}=\frac{1}{H},\quad \frac{d^2\theta}{dt^2}+g\frac{\left(\frac{K}{V}\pm h\right)}{R^2}\theta+\frac{g}{H}\frac{b}{R^2}\varepsilon=0;$$

posons pour simplifier

$$\frac{\left(\frac{K}{V}\pm h\right)}{R^2}=\frac{1}{H'}\quad \frac{1}{HR^2}=\frac{1}{H''},$$

(6) $$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{H'}\theta+\frac{bg}{H''}\varepsilon=0.$$

Telle est la deuxième équation qui lie ε, θ et t ; si l'on avait $b=0$ cette équation donnerait

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{H'}\theta=0,$$

équation entièrement de la même forme que celle qui lie ε et t quand $b=0$, c'est-à-dire que celle du pendule.

349. On voit donc que quand $b=0$, c'est-à-dire quand G et I sont sur la même verticale, les oscillations déterminées par ε et θ sont toutes deux isochrones.

C'est encore ce qui a lieu lorsque b n'est pas nul, car les deux équations qui déterminent le mouvement sont

(1) $$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}-b\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g\varepsilon}{H}=0,$$

et

(6) $$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{H'}\theta+\frac{bg}{H''}\varepsilon=0;$$

ce sont les deux équations simultanées qu'il faut intégrer. Multiplions (6) par b et ajoutons, il viendra

(7) $$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}+\frac{bg}{H'}\theta+\left(\frac{g}{H}+\frac{b^2g}{H''}\right)\varepsilon=0.$$

Multiplions maintenant (6) par une indéterminée λ, il viendra en l'ajoutant à

$$(7)\quad d^2\frac{(\varepsilon+\lambda\theta)}{at^2}+\left(\frac{g\lambda}{H'}+\frac{bg}{H'}\right)\theta+\left(\frac{bg\lambda}{H''}+\left(\frac{g}{H}+\frac{b'g}{H''}\right)\right)\varepsilon=0,$$

ou bien

$$(8)\quad d^2\frac{(\varepsilon+\lambda\theta)}{dt^2}+\left\{\frac{(bg\lambda+b'g)}{H''}+\frac{g}{H}\right\}\left(\varepsilon+\frac{\frac{g\lambda+bg}{H'}}{\frac{bg\lambda+b'g}{H''}+\frac{g}{H}}\theta\right)=0;$$

on peut ramener cette équation à ne renfermer qu'une variable $\varepsilon+\lambda\theta$, en déterminant λ de manière que

$$(9)\qquad \varepsilon+\frac{\frac{\lambda+b}{H'}}{\frac{b\lambda+b'}{H''}+\frac{1}{H}}\theta=\varepsilon+\lambda\theta,$$

d'où deux valeurs λ_1 et λ pour λ_2, ces deux valeurs seront de signe contraire, car l'équation (9) se ramène à

$$b'HH'\lambda^2+(H'H''-HH''+b'HH')\lambda=bHH'',$$

équation dont les racines seront de signe contraire, puisque le terme seul connu est négatif : l'équation (8) prendra en posant

$$\frac{b\lambda+b'}{H''}+\frac{1}{H}=\frac{1}{H'''},$$

la forme

$$d^2\frac{(\varepsilon+\lambda\theta)}{dt^2}+\frac{g}{H'''}(\varepsilon+\lambda\theta)=0.$$

On voit que cette forme est la même que celle des équations précédentes ; seulement, au lieu d'une varia-

ble ε ou θ, on a $\varepsilon+\lambda\theta$; nous aurons pour l'intégrale, pour les deux valeurs λ_1 λ_2 de λ :

$$(17)\quad \begin{cases} \varepsilon+\lambda_1\theta=(\varepsilon_0+\lambda_1\theta_0)\cos.\left(\frac{g}{H_1}\right)^{\frac{1}{2}}t, \\ \varepsilon+\lambda_2\theta=(\varepsilon_0+\lambda_2\theta_0)\cos.\left(\frac{g}{H_2}\right)^{\frac{1}{2}}t, \end{cases}$$

(H_1 et H_2 étant ce que devient H''' pour $\lambda=\lambda_1$ et $\lambda=\lambda_2$).

350. Remarquons que si sur KL nous posons $IT_1=\lambda_1$, $IT_2=\lambda_2$ et en sens contraire, puisque λ_1 et λ_2 sont de signes contraires, les valeurs S_1T_1 et S_2T_2 seront semblables à celles de $\lambda_1\theta$, $\lambda_2\theta$, et nous aurons Fig. 124.

$$\varepsilon+\lambda_1\theta=T_1U_1=\varepsilon_1,\quad \varepsilon+\lambda_2\theta=T_2U_2=\varepsilon_2,$$

en vertu des équations (1); on voit donc que les longueurs ε_1, ε_2 varient comme ε dans le cas de $b=0$: les deux points T_1, T_2 oscillent donc comme des pendules simples; il existe donc dans le cas général deux centres d'oscillation.

CHAPITRE TROISIÈME.

ÉQUILIBRE DES FLUIDES ÉLASTIQUES. NIVELLEMENT BAROMÉTRIQUE.

351. Considérons en premier lieu un fluide élastique homogène contenu dans un vase et soumis à l'action de la gravité, que l'on regarde comme une force verticale constante. Admettons de plus que la température soit uniforme dans toute l'étendue du fluide, ce qui permettra d'écrire, conformément à la loi de Mariotte,

$$p=k\rho,$$

p désignant la pression qui a lieu dans un point quelconque, ρ la densité du fluide en ce point, et k un coefficient constant. On obtiendra la loi de l'équilibre du fluide, en remarquant que x désignant l'ordonnée verticale d'un point quelconque comptée de bas en haut à partir d'un plan horizontal fixe, on a ici

$$p = \mathrm{A}.e^{-\frac{gx}{k}}, \quad \text{ou} \quad x = \frac{k}{g} \log. \frac{\mathrm{A}}{p},$$

A étant une constante arbitraire. Et si l'on nomme P la pression qui répond au point dont l'ordonnée verticale est X, on aura

$$p = \mathrm{P}.e^{\frac{g}{k}(\mathrm{X}-x)}, \quad \text{ou} \quad x - \mathrm{X} = \frac{k}{g} \log. \frac{\mathrm{P}}{p}.$$

Cette équation donnant pour x une valeur infinie lorsqu'on fait $p=o$, on voit que l'on ne peut supposer qu'aucune pression n'est exercée sur la surface supérieure du fluide, sans admettre en même temps que la hauteur de la colonne de fluide est infinie. Mais comme la densité devient nulle en même temps que la pression, il faut seulement entendre par ce résultat que l'on ne peut spécifier la hauteur à laquelle se termine le fluide.

Considérons maintenant plusieurs gaz ou vapeurs soumis à l'action de la gravité et contenus dans un même vase, en supposant comme ci-dessus la température constante. On sait, par les recherches des physiciens : 1° que ces fluides, parvenus à un état d'équilibre, se trouveront mélangés complétement de manière à former un corps homogène ; 2° que, dans cet état, chaque fluide supporte une partie de la pression totale égale à celle qu'il supporterait s'il remplissait seul le

même espace. Soient pour un point quelconque ρ_1,ρ_2,ρ_3, etc., les densités des divers fluides qui forment le mélange; p_1,p_2,p_3, etc., les parties de la pression totale p qu'ils supportent respectivement. On aura

$$p_1=k_1\rho_1,\quad p_2=k_2\rho_2;\quad p_3=k_3\rho_3,\ \text{etc.},$$

k_1,k_2,k_3, etc., désignant des coefficients constants, et

$$p=p_1+p_2+p_3+\text{etc.}$$

La densité ρ du mélange sera évidemment la somme $\rho_1+\rho_2+\rho_3+$etc. des densités de chaque gaz. Donc ici l'équation $h=p\rho$ devient

$$k_1\rho_1+k_2\rho_2+k_3\rho_3+\text{etc.}=k(\rho_1+\rho_2+\rho_3+\text{etc.}),$$

d'où

$$k=\frac{k_1\rho_1+k_2\rho_2+k_3\rho_3+\text{etc.}}{\rho_1+\rho_2+\rho_3+\text{etc.}}.$$

Cette expression de k doit être substituée dans la formule précédente qui devient ainsi

$$x-X=\frac{k_1\rho_1+k_2\rho_2+k_3\rho_3+\text{etc.}}{(\rho_1+\rho_2+\rho_3+\text{etc.})g}\log.\frac{P}{p},$$

quand on veut l'appliquer à un mélange de plusieurs gaz.

352. Nous avons supposé qu'il s'agissait d'un fluide contenu dans un vase; mais si l'on voulait considérer l'équilibre d'un fluide occupant un grand espace, ou même l'équilibre de l'atmosphère terrestre dans toute son étendue, il est évident que les résultats précédents pourraient être appliqués, en supposant la direction commune de la gravité et des ordonnées x perpendiculaire à la surface des eaux, qui est nécessairement ici une surface de niveau. Ces résultats donnent l'expression de la différence de niveau de deux points quel-

conques du fluide au moyen du rapport des pressions qui ont lieu respectivement dans ces deux points. Mais comme les formules précédentes sont fondées sur l'hypothèse d'une température constante, et d'une action constante exercée par la gravité, hypothèses qui ne s'accordent point avec l'état véritable de l'atmosphère, elles ne peuvent être employées à la mesure des hauteurs par l'observation du baromètre.

Pour établir les formules dont cette mesure exige l'usage, on doit reprendre l'équation différentielle

$$dp = \rho d(Xdx + Ydy + Zdz),$$

qui devient ici

$$dp = -\rho g . dx;$$

et intégrer cette équation en ayant égard aux variations de la gravité, de la température, et de la composition même du fluide atmosphérique.

Quant à l'intensité de la gravité elle varie avec la latitude et avec la hauteur au-dessus du niveau des mers. Nommant

R le rayon moyen de la terre = 6366198^m;

L la latitude du lieu comptée de l'équateur;

x la hauteur du lieu au-dessus du niveau de la mer;

g la vitesse imprimée par la gravité aux corps pesants à la latitude de 45° et au niveau de la mer;

on a généralement

$$g\left(\frac{R}{R+x}\right)^2 (1-0{,}002837.\cos.2L)$$

pour l'expression de la vitesse imprimée par cette force.

Quant à la valeur de la densité ρ du fluide atmosphérique, nous nommerons

ϖ le poids du mètre cube de mercure à la température de 0°, au niveau de la mer et à la latitude moyenne de 45°;

Π Le poids du mètre cube d'air pur dans les mêmes circonstances, sous une pression égale pour un mètre quarré à ϖ (0,76);

et nous rappellerons que, d'après les lois combinées de Mariotte et de Gay-Lussac, le poids du mètre cube d'air atmosphérique deviendra, dans le même lieu, sous la température t et la pression p,

$$\Pi \frac{p}{\varpi(0,76)} \frac{1}{1+0,00375.t}.$$

Cette expression suffirait si le fluide atmosphérique pouvait être regardé comme formé d'air pur. Mais il est nécessaire d'avoir égard à la vapeur aqueuse dont il est presque toujours mélangé.

On sait qu'à température et à pression égales, la pesanteur spécifique de la vapeur aqueuse est les 0,624 de celle de l'air. Considérons donc un mélange d'air et de vapeur aqueuse : soit t la température, p la pression supportée par le mélange, $p-p_{,}$ la partie de cette pression supportée par l'air, et $p_{,}$ la partie supportée par la vapeur aqueuse. On aura, pour le poids du mètre cube de l'air,

$$\Pi \frac{p-p_{,}}{\varpi(0,76)} \frac{1}{1+0,00375.t},$$

pour le poids du mètre cube de la vapeur aqueuse

$$0,624\,\Pi \frac{p_{,}}{\varpi(0,76)} \frac{1}{1+0,00375.t};$$

et pour le poids du mètre cube du mélange

$$\text{n}\,\frac{p-0{,}376.p_{\prime}}{\varpi(0{,}76)}\;\frac{1}{1+0{,}00375.t}.$$

Si ce mélange était saturé de vapeur, $p_{\prime}$ serait la pression correspondante à la température t dans la table donnant la force élastique acquise par la vapeur aqueuse au maximum de densité sous diverses températures.

La formule précédente exprime le poids du mètre cube de fluide atmosphérique considéré comme un mélange d'air et de vapeur à la latitude de 45° et au niveau de la mer. Si l'on se trouvait dans un tel lieu l'on devrait mettre cette expression à la place de ρg dans l'équation différentielle écrite au commencement. Mais comme en changeant de lieu l'intensité du poids dont il s'agit variera dans la même proportion que l'action de la gravité, on doit introduire le facteur

$$\left(\frac{\text{R}}{\text{R}+x}\right)^2(1-0{,}002837.\cos 2\text{L}),$$

et écrire (en divisant par p)

$$\frac{dp}{p}=-\frac{\text{n}}{0{,}76.\varpi}(1-0{,}002837.\cos.2\text{L})\frac{1-0{,}376\frac{p_{\prime}}{p}}{1+0{,}00375.t}\,\frac{\text{R}^2dx}{(\text{R}+x)^2}.$$

Cette équation pourrait être immédiatement intégrée, si les quantités variables $\frac{p_{\prime}}{p}$ et t étaient exprimées en fonction de x. Mais comme la manière dont la proportion de la vapeur aqueuse et la température varient avec la hauteur x est mal connue, et que les relations de ces quantités changent d'ailleurs avec les lieux et avec les modifications atmosphériques, on doit se borner à prendre des termes moyens.

Considérons le facteur $1-0{,}376\frac{p_1}{p}$. Si l'on pouvait supposer que l'air est toujours saturé de vapeur, il résulte de la loi comme de la force élastique de la vapeur aqueuse que dans l'intervalle de 0° à 30°, où se font communément les observations barométriques, on pourrait regarder sans erreur sensible p_1 comme croissante proportionnellement à t, et écrire

$$p_1 = \varpi\,(0^m{,}00512 + 0^m{,}000865.\,t).$$

Dans l'incertitude où l'on se trouve à l'égard de la véritable valeur qu'il convient d'attribuer à cette quantité, on prendra la moitié de la valeur qui répond au point de saturation, c'est-à-dire que l'on supposera

$$p_1 = \varpi\,(0^m{,}00256 + 0^m{,}0004325.\,t).$$

En donnant d'ailleurs à p la valeur moyenne $\varpi\,(0^m{,}76)$, nous substituerons donc au facteur $1-0{,}376\frac{p_1}{p}$ la quantité

$$1-0{,}376\,\frac{0{,}00256+0{,}0004325.\,t}{0{,}76} = 1-0{,}001267-0{,}000214.\,t.$$

Mais la fraction

$$\frac{1-0{,}001267-0{,}000214.\,t}{1+0{,}00375.\,t}$$

diffère très-peu, en négligeant les quantités très-petites du second ordre, de

$$\frac{1-0{,}001267}{1+0{,}104.\,t}:$$

ainsi l'on peut remplacer l'équation ci-dessus par la suivante

$$\frac{dp}{p}=\frac{\Pi(1-0,001267)}{0,76.\varpi}(1-0,002837.\cos.2L)\frac{1}{1+0,004.t}\frac{R^2dx}{(R+x)^2}.$$

En intégrant nous regarderons la température t comme constante, et nous prendrons pour la valeur de cette quantité la moyenne des températures T,t qui auront été observées aux deux points dont on veut connaître la différence de niveau. Si l'on désigne donc par X et x les hauteurs de ces deux points au-dessus du niveau de la mer, et par P et p les pressions correspondantes, il viendra

$$\log.\frac{P}{p}=\frac{\Pi(1-0,001267)}{0,76\varpi}(1-0,002837.\cos.2L)\frac{1}{1+0,002(t+T)}\frac{x-X}{1+\frac{x+X}{R}},$$

en négligeant les termes qui sont divisés par le quarré de R. Le logarithme du premier membre est un logarithme népérien, et on doit le multiplier par M=2,302585 si on le prend dans les tables ordinaires.

353. L'équation précédente donnera la différence de niveau $x-X$ en fonction du rapport $\frac{P}{p}$ des pressions qui ont lieu respectivement aux deux points que l'on considère. Il reste maintenant à déduire ce rapport de l'observation du baromètre. Désignons par H et h les hauteurs du baromètre observées dans ces deux points, par T_0 et t_0 les températures des colonnes de mercure, qui diffèrent en général des températures de l'air désignées ci-dessus par T et t. Comme le mercure se dilate dans l'intervalle de 0° à 100° de $\frac{1}{5550}$, le poids du mètre cube de mercure au niveau de la mer sous la latitude de 45° et à la température t_0 sera

$$\frac{\varpi}{1+\frac{t_0}{5550}},$$

ou, à fort peu près,

$$\varpi\left(1-\frac{t_0}{5550}\right).$$

Le même poids, sous la latitude L et à la distance $R+x$ du centre de la terre, devient

$$\varpi(1-0{,}002837.\cos.2L)\left(1-\frac{t_0}{5550}\right)\frac{R^2}{(R+x)^2}.$$

Ainsi, l'on a

$$p=h.\varpi(1-0{,}002837.\cos.2L)\left(1-\frac{t_0}{5550}\right)\frac{R^2}{(R+x)^2},$$

$$P=H.\varpi(1-0{,}002837.\cos.2L)\left(1-\frac{T_0}{5550}\right)\frac{R^2}{(R+X)^2};$$

et par conséquent, en développant les fractions et négligeant les quantités très-petites du second ordre,

$$\frac{P}{p}=\frac{H}{h}\left(1+\frac{t_0-T_0}{5550}\right)\left(1+\frac{x-X}{R}\right)^2.$$

Cette expression doit être substituée dans l'équation précédente : en effectuant cette substitution ; remarquant que x étant un très-petit nombre, le logarithme hyberbolique de $1+x$ est à fort peu près égal à x, et le logarithme tabulaire à $0{,}434295.x$; enfin, tirant la valeur de $x-X$, il viendra

$$(a)\quad x-X=\frac{0{,}76.M.\varpi}{(1-0{,}001267)\Pi}(1+0{,}002837.\cos.2L)$$

$$[1+0{,}002(t+T)]\left(1+\frac{x+X}{R}\right)\left[\log\frac{H}{h}+0{,}434295\left(\frac{t_0-T_0}{5550}+2\frac{x-X}{R}\right)\right].$$

Le logarithme du second membre doit être pris dans les tables ordinaires. Le facteur

$$\frac{0,76.\mathrm{M}.\varpi}{(1-0,001267)\,\Pi},$$

où M représente le nombre 2,302585, est un coefficient constant dont on peut déterminer la valeur d'après le rapport connu des pesanteurs ϖ, Π, du mercure et de l'air atmosphérique pris à la latitude de 50°, à la température 0°, et sous la pression de $0^{\mathrm{m}}.76$. D'après les expériences de MM. Biot et Arago, on a

$$\frac{\varpi}{\Pi}=10466,8,$$

ce qui donne pour la valeur du coefficient dont il s'agit

$$\frac{0^{\mathrm{m}},76.\mathrm{M}.\varpi}{(1-0,001267)\,\Pi}=18339^{\mathrm{m}},8.$$

La valeur du même coefficient pouvait être aussi déterminée en appliquant la formule précédente à des observations barométriques faites dans des lieux dont les différences de niveau étaient connues par d'autres procédés. C'est effectivement de cette manière qu'avant même l'évaluation exacte du rapport des pesanteurs spécifiques de l'air et du mercure, les observations faites par M. Ramond dans les Pyrénées avaient donné, pour la valeur du coefficient dont il s'agit, le nombre

$$18336^{\mathrm{m}},$$

qui diffère très-peu du précédent. Nous écrivons donc simplement

$$x-X=18336^{m}(1+0{,}002837.\cos.2L)[1+0{,}002(t+T)]$$
$$\left(1+\frac{x+X}{R}\right)\left[\log.\frac{H}{h}+0{,}434295\left(\frac{t_o-T_o}{5550}+2\frac{x-X}{R}\right)\right].$$

Nous remarquerons d'ailleurs que le coefficient 18336^{m} a été déduit d'un autre coefficient 18393^{m}, déterminé immédiatement par les observations de M. Ramond, en ayant égard au décroissement de la gravité dans le sens vertical, et ramenant au niveau de la mer le résultat obtenu dans les lieux plus élevés où les observations avaient été faites. La substitution du nombre 18393^{m} au nombre 18366^{m} tiendrait donc compte d'une manière approchée, pour les observations dont il s'agit, des termes fort petits qui ont R au dénominateur, et qui sont introduits par la considération du décroissement de la pesanteur dans le sens vertical. On jugera d'après cela que l'on peut supprimer ces termes et employer utilement la formule plus simple

$$(b)\quad x-X=18393^{m}(1+0{,}002837.\cos.2L)[1+0{,}002(t+T)]$$
$$\left[\log.\frac{H}{h}+0{,}00007825(t_o-T_o)\right].$$

354. On pourrait même réduire à l'unité le facteur qui contient la latitude L : mais il vaut mieux se servir de la table ci-après qui contient les logarithmes des produits de 18393 par les valeurs de ce facteur correspondantes à diverses latitudes. Plusieurs personnes ont construit des tables très-étendues destinées à faciliter le calcul des observations barométriques : mais il ne paraît pas que l'usage de ces tables offre un avantage sur l'application immédiate de l'équation précédente, en employant les tables des logarithmes ordinaires.

LATITUDES COMPTÉES DE L'ÉQUATEUR=L.	LOGARITHMES DES NOMBRES 18393(1+0,002837.cos.2L).
Degrés sexagésimaux.	
0	4,265 8830
5	8643
10	8089
15	7184
20	5955
25	4439
30	2682
35	0738
40	4,264 8665
45	6526
50	4386
55	2310
60	0361
65	4,263 8599
70	7077

Nous joignons l'exemple suivant :

Latitude, 1°45′. Station supérieure, $t = -1°,6$ Station inférieure, $T = 25,3$ $23,7$ $47,4 = 2(t+T)$	$h = 167,2$ $H = 337,79$	$t_0 = 10°,0$ $T_0 = 25,3$ $-15,3 = t_0 - T.$

Logarithme du coefficient pour 0° de latitude.		4,265883
Log. 1,0474.		0,020113
Log. 337,79.	2,528660	
Log. 167, 2°.	2,223236	
Différence.	0,305424	
0,00007825 (—15,3).	0,001197	
	0,304227 dont le logarithme est. . .	$\bar{1}$,483198
Logarithme de la hauteur cherchée (5877^{m},5).		3,769194

Cet exemple présente le calcul de la hauteur du Chimboraço, d'après les observations de M. de Humboldt, l'un des cas où les termes négligés pouvaient devenir les plus sensibles. En conservant ces termes, M. Ramond trouve 5879m,2 au lieu de 5877m,5 : la différence de ces deux résultats est très-peu importante, eu égard à la grandeur de la hauteur calculée.

Les lettres H et h représentent dans les formules précédentes les indications lues sur l'instrument des hauteurs des colonnes de mercure qui font équilibre à la pression atmosphérique aux stations supérieure et inférieure. Cette indication est modifiée par la dilatation des corps sur lesquels les échelles sont gravées. Soit δ la dilatation linéaire de ces corps pour un degré du thermomètre centigrade, en sorte que la longueur 1 à la température 0° devienne $1+\delta t_0$ à la température t_0, les hauteurs h et H observées respectivement aux températures t_0 et T_0 deviendraient donc

$$\frac{h}{1+\delta t_0} \quad \text{et} \quad \frac{H}{1+\delta T_0},$$

si on les observait à la température 0°. Par conséquent, pour avoir égard à la modification dont il s'agit, on doit écrire dans la formule (a)

$$\frac{H}{h}\,\frac{1+\delta t_0}{1+\delta T_0}$$

ou à fort peu près

$$\frac{H}{h}\,[1+\delta(t_0-T_0)],$$

à la place de $\frac{H}{h}$. Il en résulte que le coefficient de $t_0 - T_0$, dans les formules (*a*) et (*b*), doit être augmenté du produit de δ par le nombre 0,434295. En employant les résultats connus on déterminera donc ce coefficient comme il suit :

La dilatation de l'échelle étant supposée nulle.	0,00007825
Échelles sur verre et sur bois. . .	0,00008205
Échelles sur cuivre.	0,00008641

On peut former d'avance une table du produit de ces coefficients par les nombres naturels depuis 1 jusqu'à 9. De cette manière le calcul des hauteurs pour la formule (*a*) semble aussi prompt que l'on puisse le désirer.

355. Les observations barométriques et l'usage de la formule précédente pour la détermination des différences de niveau, exigent une grande circonspection En effet, cette formule est fondée sur l'hypothèse d'un état d'équilibre et d'une disposition thermométrique et hygrométrique qui existent rarement dans l'atmosphère. L'expérience a fait reconnaître les circonstances favorables ou contraires aux observations. M. Ramond établit sur ce sujet les règles suivantes :

« 1° On peut espérer d'avoir les hauteurs exactes, » quand on observera à midi, par un temps calme et » qui n'incline pas trop au changement, les deux ba- » romètres se trouvant l'un et l'autre sur des sommets » isolés, ou le baromètre inférieur étant placé dans » une plaine bien ouverte, à une distance médiocre. » Dans ce dernier cas même, il vaudrait mieux que

» la distance fut plus grande, que d'avoir le baromè-
» tre placé au pied des montagnes, où l'avantage de
» la proximité est plus que balancé par l'action pertur-
» batrice des vents descendants. Hors de ces circon-
» stances éminemment favorables, les erreurs n'ont
» point de mesure fixe : elles ne peuvent être corri-
» gées que par l'estime, et selon le degré d'influence
» que l'expérience de l'observateur assignera aux
» causes qui doivent les produire ;

» 2° On estimera, en général, les bauteurs trop
» faibles :

» Quand l'observation se fera le matin ou le soir ;

» Quand le baromètre inférieur étant dans une
» plaine, le baromètre supérieur sera dans une vallée
» étroite et profonde ;

» Quand les vents souffleront fortement de la région
» australe ;

» Quand le temps sera manifestement orageux ;

» 3° On estimera au contraire les hauteurs trop
» fortes :

» Quand on observera entre midi et deux ou trois
» heures, surtout l'été et quand le soleil ne sera point
» caché par des nuages ;

» Quand le baromètre supérieur étant au sommet
» des montagnes, le baromètre inférieur sera placé
» dans une gorge étroite et fortement dominée ;

» Quand il régnera un vent fort de la région boréale,
» surtout si l'on est sur une montagne, et s'il en frappe
» la pente la plus escarpée ;

» 4° Enfin on sera certain que les errêurs seront
» grandes et variables dans tous les sens quand les

» différences de niveau seront peu considérables, et
» les deux baromètres placés dans la même plaine ou
» la même vallée, et bien plus encore lorsqu'ils seront
» placés dans deux vallées séparées par une chaîne de
» montagnes. Dans ces cas-ci la distance horizontale
» ne saurait être trop petite, et malgré la proximité,
» on ne pourra prendre confiance que dans les moyen-
» nes d'un grand nombre d'observations. »

356. Les causes principales d'erreur sont les vents, et l'irrégularité de la loi du décroissement de la température. Si la direction du mouvement de l'air était horizontale, il ne paraît pas que ce mouvement fît varier la hauteur du baromètre, à moins toutefois que la cuvette ne fût abritée du vent par un obstacle, dont l'effet serait de diminuer la pression. Mais quand la direction du vent est ascendante ou descendante, le mercure se tient nécessairement plus bas ou plus haut qu'il ne le ferait si le vent n'avait pas lieu, abstraction faite des irrégularités provenant de la manière dont la cuvette est exposée au vent, ou en est abritée. A l'égard de la température, les erreurs qui proviennent du défaut d'uniformité de son décroissement sont peut-être moins grandes que celles qui tiennent à ce que l'observation du thermomètre, au lieu de donner la véritable température de la couche horizontale d'air dans laquelle on se trouve, ne donne qu'une température locale produite en grande partie par le rayonnement du terrain et des corps environnants.

Les baromètres à cuvette dont le niveau se règle au moyen d'une vis de pression qui met la surface du mercure en contact avec une pointe fixe, sont généralement considérés comme les meilleurs. Il est important

de bien connaître la température du mercure. Un thermomètre enchâssé dans la monture ne suffit pas pour cela. On a proposé une autre disposition qui consiste à avoir un second tube fermé égal à celui du baromètre et rempli de mercure, dans lequel le thermomètre est plongé. Les nivellements exigent absolument le concours de deux observateurs munis chacun d'instruments pareils soigneusement comparés. Les observations correspondantes doivent être simultanées, et faites toujours entre onze heures et une heure après midi. On sait que dans les instruments de ce genre, la colonne de mercure, par l'effet de la capillarité, est plus courte qu'elle ne devrait être. La quantité de cette dépression est relative au diamètre du tube, et on en trouvera la valeur dans la table ci-contre. On néglige ordinairement d'en tenir compte, parce qu'elle affecte également les deux instruments quand leurs tubes sont d'égal diamètre; mais comme le résultat dépend, non de la différence des hauteurs des baromètres, mais du rapport de ces hauteurs, il convient d'y avoir égard, surtout quand la différence de niveau est peu considérable. Les baromètres doivent être placés verticalement, à l'abri du vent et du soleil. Le thermomètre pour la

DIAMÈTRE DU TUBE.	DÉPRESSION.
Millimètre.	Millimètre.
2	4,560
3	2,902
4	2,039
5	1,506
6	1,148
7	0,881
8	0,685
9	0,535
10	0,420
11	0,351
12	0,260
13	0,205
14	0,160
15	0,125
16	0,097
17	0,075
18	0,059
19	0,043
20	0,035

température de l'air doit être placé au-dehors, à la hauteur de l'œil, et abrité seulement du soleil par le bâton qui le supporte. (Voyez, pour de plus grands détails, les *Mémoires sur la formule barométrique* de M. Ramond, et l'*Instruction pratique* qui y est jointe.)

QUATRIÈME PARTIE.

HYDRODYNAMIQUE.

Les équations de l'équilibre des fluides que nous avons trouvées, sont fondées sur la propriété caractéristique, commune aux liquides et aux fluides aériformes, de transmettre également en tous sens les pressions appliquées à leur surface et d'exercer autour de chaque point de leur masse, en vertu de l'action moléculaire, des pressions égales suivant toutes les directions : ce principe peut convenir à l'hydrostatique et n'être pas toujours applicable à l'*hydrodynamique*, c'est-à-dire à la partie de la mécanique qui traite du mouvement des fluides, et il y a sans doute des phénomènes du mouvement des fluides, en général, qui dépendent de la même égalité parfaite de pression en tous sens. Cette circonstance introduirait dans les équations générales du mouvement des fluides des termes qui ne peuvent se déduire de leurs équations d'équilibre ; mais ici, nous supposerons, suivant la méthode suivie ordinairement, la propriété de l'égalité de pression, commune à l'état d'équilibre et à l'état de mouvement ; et, dans ce cas, les équations de l'hydrostatique, fondées sur cette propriété s'étendront immédiatement à l'hydrodynamique, au moyen du prin-

cipe de d'Alembert qui est applicable à tous les systèmes de points matériels.

Équation du mouvement des fluides.

357. Nous ne considérerons que le mouvement d'un fluide, d'un liquide par exemple, contenu dans un vase; et dans le cas où ce mouvement s'effectue par filets, c'est-à-dire de manière que les molécules liquides passent par les mêmes points à des époques différentes.

Avant tout nous allons établir un théorème nécessaire au moyen de l'équation générale de l'équilibre des fluides,

$$dp=\rho\,(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz):$$

il est bien entendu que nous conservons les mêmes notations.

Fig. 125 Soit une masse de fluide en équilibre, concevons une courbe tracée dans ce fluide, comptons les arcs positivement à partir d'un certain point, la tangente en un autre point x,y,z, en avant du premier dans le sens de l'arc S, fait avec les demi-axes des coordonnées, des angles dont les cosinus sont,

$$\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds};$$

la force accélératrice en ce même point fait avec les demi-axes des angles dont les cosinus sont,

$$\frac{\mathrm{X}}{\varphi},\ \frac{\mathrm{Y}}{\varphi},\ \frac{\mathrm{Z}}{\varphi},$$

d'où l'on conclut pour le cosinus de l'angle formé par la force accélératrice et la tangente,

$$\cos.\delta = \frac{X}{\varphi}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{\varphi}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{\varphi}\frac{dz}{ds}:$$

considérons s comme la seule variable indépendante, x, y, z seront fonction de S—. On tire de l'équation précédente

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = \varphi\cos.\delta,$$

et

$$Xdx + Ydy + Zdz = \varphi\cos.\delta ds \quad \text{d'où} \quad \frac{dp}{ds} = \rho\varphi\cos.\delta,$$

p, ρ, φ étant fonction de S ; $\varphi\cos.\ \delta$ est la projection de la force accélératrice sur la tangente, projection qui sera positive ou négative suivant que nous l'avons dit ailleurs.

Si la courbe est telle que φ soit normale en chacun de ses points, on aura $\frac{dp}{ds} = 0$; et réciproquement, si on veut que la pression ne varie pas sur cette courbe, on doit avoir :

$$\frac{dp}{ds} = 0 \quad \text{d'où} \quad \rho\varphi\cos.\delta = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que $\cos.\ \delta = 0$. La courbe sera donc située sur une surface de niveau ; ce sera une courbe de niveau ; ainsi *la force accélératrice sera normale en chacun des points d'une courbe de niveau.*

358. Passons maintenant au mouvement par filets. Il y a beaucoup de cas où le mouvement s'opère de cette manière, par exemple dans un canal où l'eau ne s'élève ni ne s'abaisse et où les conditions de l'écoulement restent les mêmes à des époques différentes. Dans le mouvement par filets, aux mêmes points les molécules

sont supposées avoir la même vitesse ; pour obtenir ce mouvement il faut que le vase soit constamment plein à même hauteur ; si le vase se vide, ce mouvement cesse.

Fig. 126. Soit ω la vitesse après le temps t d'une molécule située en un point A du filet qu'on peut considérer comme une courbe. Supposons un diaphragme placé à l'ouverture inférieure o du vase : au moment où on enlève ce diaphragme, le mouvement commence, les vitesses croissent par degrés et après un certain temps, le mouvement permanent s'établit. La vitesse ω dépend de la position du point A ou de l'arc S et du temps t et $\omega = f(s,t)$; pour avoir l'équation du mouvement il faut avoir recours à la dynamique ; nous avons vu que, dans un système de points matériels, libres ou assujettis, le système de forces capable de produire le mouvement observé est toujours équivalent au système des forces appliquées ; ainsi il y aurait équilibre entre les forces appliquées et des forces égales, et directement opposées aux forces capables de produire le mouvement observé de la molécule qui, après le temps t arrivera en A : concevons qu'après être parvenue à ce point, la molécule se meuve encore, pendant le temps, Δt; $\omega\Delta t$ sera, sans erreur sensible, l'espace parcouru par la molécule pendant Δt, de sorte que l'arc s sera devenue $s+\omega\Delta t$: soit $\Delta\omega$ l'accroissement correspondant de la vitesse, la molécule étant alors au point de la courbe $s+\omega\Delta t$, on aura

$$\Delta\omega = f(s+\omega\Delta t,\ t+\Delta t) - f(s,\ t),$$

et d'après le théorème de Taylor,

$$\omega+\Delta\omega = f(s,\ t) + \omega\Delta t\frac{d.f(s,\ t)}{ds} + \Delta t\,\frac{df(s,\ t)}{dt} + \text{etc.},$$

d'où

$$\Delta\omega = \omega\Delta t \frac{d.f(s,t)}{ds} + \Delta t \frac{d.f(s,t)}{dt},$$

ou

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \omega \frac{d.f(s,t)}{ds} + \frac{d.f(s,t)}{dt} = \omega \frac{d\omega}{ds} + \frac{d\omega}{dt}.$$

Dans le cas d'équilibre, ou avant

$$\frac{dp}{ds} = \rho\varphi\cos.\delta,$$

nous allons appliquer cette équation au mouvement en remplaçant φ par la résultante de la force appliquée et d'une force égale et directement opposée à celle qui serait capable de produire le mouvement observé. Soit φ' cette dernière force, $-\varphi'\cos.\delta$ sera la projection de la force égale et directement opposée ; on aura

$$\frac{dp}{ds} = \rho(\varphi\cos.\delta - \varphi'\cos.\delta').$$

Cette équation n'est pas tout à fait rigoureuse, car quand le mouvement a lieu, on n'est pas certain que les pressions soient normales aux surfaces qui les supportent, néanmoins, en hydrodynamique, on admet et on applique l'équation précédente ; mais auparavant il faut, pour $\varphi'\cos.\delta'$ substituer sa valeur ; or φ' est la force capable de produire à elle seule le mouvement observé de la molécule m, si cette molécule était libre et indépendante de toutes les autres (δ' est l'angle qu'elle fait avec la tangente prolongée dans le sens de l'arc) ; or, on sait que la force tangentielle à la courbe que tend à décrire cette molécule, et la seule qui influe sur l'intensité de la vitesse, est :

$$\lim. \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt},$$

quand ω varie avec le temps : dans le cas qui nous occupe

$$\lim. \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \omega \frac{d\omega}{ds} + \frac{d\omega}{dt} = \varphi' \cos. \delta',$$

cherchons la valeur de φ : les cosinus avec les axes sont

$$\frac{X}{\varphi}, \frac{Y}{\varphi}, \frac{Z}{\varphi},$$

et par suite

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = \varphi \cos. \delta,$$

d'où

$$\frac{dp}{ds} = \rho\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} - \omega\frac{d\omega}{ds} - \frac{d\omega}{dt}\right);$$

de plus, les molécules, en passant aux mêmes points, prennent les mêmes vitesses ; ω est donc fonction de s seulement, et en un point donné ne dépend que de sa position sur l'arc s et nullement du temps t ; d'après cela, l'équation précédente se simplifie et devient

$$\frac{dp}{ds} = \rho\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} - \omega\frac{d\omega}{ds}\right);$$

en outre, généralement la force φ est de nature telle que le deuxième membre est une différentielle exacte, soit que φ soit une force constante et parallèle à elle-même soit que cette force émane d'un centre fixe. Soit

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU = dF(x, y, z);$$

si dans U on met pour x, y, z leur valeur en s, U sera fonction de s et

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{ds} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds};$$

et par conséquent

$$\frac{dp}{ds}=\rho\left(\frac{dU}{ds}-\omega\frac{d\omega}{ds}\right),$$

équation qui ne renferme plus que s. On pourra donc intégrer par rapport à cette variable; on pourra, par exemple, le faire à partir de $s=o$ correspondant au point I, en supposant toujours le vase rempli à la même hauteur, et ω_o et p_o seront la vitesse et la pression en ce point, ρ étant en outre constant. Ainsi on aura

$$p-p_o=\rho\left[U-U_o-\frac{1}{2}(\omega^2-\omega_o^2)\right].$$

Reprenons l'équation

$$\frac{dp}{ds}=\rho\left(Xdx+Ydy+Zdz-\omega\frac{d\omega}{ds}-\frac{d\omega}{dt}\right),$$

en l'appliquant à un liquide pesant et en comptant les x dans le sens de la pesanteur, on a

$$X=g,\ Y=0,\ Z=0,$$

et il vient

$$\frac{dp}{ds}=\rho\left(gdx-\frac{d\omega}{dt}-\omega\frac{d\omega}{ds}\right),$$

et, en supposant le mouvement permanent,

$$\frac{dp}{ds}=g\rho dx-\rho\omega\frac{d\omega}{ds},$$

d'où l'on conclut

$$p-p_o=\rho\left[g(x-x_o)-\frac{1}{2}(\omega^2-\omega_o^2)\right].$$

Au moyen de cette équation, si nous considérons un vase constamment plein à une certaine hauteur et terminé par un orifice très-étroit, le mouvement

permanent s'établissant au bout d'un certain temps, nous pourrons avoir la vitesse des molécules situées, après la sortie du vase, au-dessous de l'orifice à la surface antérieure de la veine fluide, et qui se trouvaient auparavant sur la paroi du vase : alors nous aurons sensiblement $p=p_0$, et, par conséquent, en désignant par h la différence de niveau, $\omega^2-\omega^2_0=2gh$. Mais l'orifice est très-petit en comparaison de la surface ; ainsi, les molécules se meuvent d'abord avec une vitesse très-petite ; par conséquent ω_0 sera lui-même très-petit par rapport à la vitesse ω à l'orifice ; on pourra donc le négliger ; et on aura sensiblement $\omega=\sqrt{2gh}$. Ce qui démontre le théorême de *Torricelli*, que *la vitesse du liquide à l'orifice est la même que celle qu'acquerrait une molécule pesante en tombant de la hauteur due.*

Fig. 127. On peut trouver une relation entre les vitesses ω et ω_0 : considérons un filet fluide contre la paroi : les molécules de ce filet auront une vitesse ω au point A. Appelons a_0 et a les sections horizontales faites en ces points dans le filet qui touche la paroi, par des plans perpendiculaires. Il est clair que dans un temps très-court la quantité de liquide qui passera par la section A sera sensiblement égale à $d\omega\Delta t$, et cela est général pour un mouvement par filets quelconques : dans ce temps très-court Δt, chacune des molécules de la section a sera transportée dans une section voisine qui sera elle-même sensiblement égale à a. Toutes ces molécules parcourront sensiblement un espace $\omega\Delta t$, de sorte que la quantité de liquide qui aura passé par la première section a sera renfermée entre deux sections égales à a dans un volume qu'on pourra considérer

comme un cylindre ayant pour base a et pour hauteur $\omega\Delta t$: ce volume de liquide sera donc $a\omega\Delta t$. De même le volume de liquide qui passe par la section a_0, dans ce temps Δt, sera $a_0\omega_0\Delta t$; or, dans le mouvement par filets, les quantités de liquide qui passent par deux sections transversales dans le même temps devront être les mêmes, et nous aurons

$$a\omega\Delta t = a_0\omega_0\Delta t \quad \text{ou} \quad a\omega = a_0\omega_0.$$

Si on connaissait les sections a et a_0 faites dans le filet qu'on considère dans la masse liquide, on connaîtrait alors le rapport entre les vitesses ω et ω_0. Si on représente le rapport de ces fonctions par $\frac{1}{u}$ alors

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{u},$$

nous aurons

$$\omega_0 = \frac{\omega}{u} \quad \text{ou} \quad \frac{\omega}{\omega_0} = u,$$

de plus, on a

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2gh,$$

donc, si u était connu, il serait facile de déduire de cette égalité la valeur de ω : on aurait

$$\omega^2\left(1 - \frac{1}{u^2}\right) = 2gh,$$

d'où

$$\omega = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \frac{1}{u^2}}}:$$

en négligeant $\frac{1}{u}$ vis-à-vis de l'unité, on retrouverait l'expression que nous avons obtenue précédemment.

Mais on peut déterminer approximativement le rapport u, à l'aide des considérations suivantes :

Admettons que dans la partie supérieure le vase soit sensiblement terminé par une paroi cylindrique verticale, que le plan qui termine supérieurement le liquide soit horizontal et que la vitesse des molécules contenues dans une tranche infiniment mince soit verticale et communes à tous les points de cette tranche ; enfin, que le rapport de a à a_0 reste le même pour tous les filets : l'orifice qui termine le vase étant très-étroit, la surface de la section faite dans la masse liquide par un plan horizontal va toujours en se rétrécissant jusqu'à une section transversale de la veine fluide qu'on appelle la *section contractée*, et dans le plan de laquelle nous choisissons le point A. Considérons un filet fluide quelconque : le rapport des sections a_0 et a restant le même pour tous les filets, ce rapport ne sera autre chose que le rapport des sections transversales faites dans le vase par le plan oo' et par le plan de la section contractée ; car, en désignant ces sections par A_0 et A, nous aurons, en considérant les différents filets qui composent la masse fluide,

$$\frac{a_0}{a}=\frac{a'_0}{a'}=\frac{a''_0}{a''}=\text{etc.}=\frac{a_0+a'_0+a''_0+\text{etc.}}{a+a'+a''+\text{etc.}}=\frac{A_0}{A}.$$

Ainsi, d'après cette hypothèse que l'on fait pour calculer approximativement le rapport de a à a_0, nous aurons

$$\frac{A}{A_0}=\frac{1}{u}\text{ ou }u=\frac{A_0}{A};$$

ainsi, u sera le rapport entre ces deux sections. Le vase étant toujours supposé entretenu constamment

plein, nous n'aurons qu'à mesurer les deux sections faites dans le vase et la veine fluide, et nous en conclurons l'expression de la vitesse

$$\omega = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}}:$$

on voit que si A est très-petit par rapport à A_0, u sera très-grand, de sorte que $\frac{1}{u}$ pourra être négligé.

Voilà à peu près tout ce que nous pouvons dire sur le mouvement permanent.

La vitesse ω étant connue, on peut calculer la quantité de liquide qui sortira du vase, car la vitesse ω, devenue constante après un certain temps, étant supposée verticale dans tous les points de la section contractée, la quantité de liquide qui traversera l'élément a de cette section dans le temps Δt sera $a\omega\Delta t$; et la quantité de liquide qui traversera la section entière dans le même temps sera $A\omega\Delta t$. Comme d'ailleurs ces quantités A et ω sont constantes, la quantité de liquide qui traversera la section contractée dans le temps t sera $A\omega t$, et l'orifice par lequel le liquide s'écoule du vase étant supposé très-petit, elle sera sensiblement égale à $A\sqrt{2gh}.\ t$.

Comme la veine contractée se resserre en sortant du vase, il ne faudra pas prendre pour A l'aire de l'orifice lorsqu'on voudra calculer la quantité de liquide sortie du vase. C'est effectivement ce qui résulte de l'expérience; en laissant sortir le liquide par un

orifice très-petit, on trouve que, si dans le calcul de la dépense de liquide on prend pour A la surface de l'orifice, le résultat obtenu est plus grand que celui de l'expérience ; pour le mettre à sa véritable valeur, il faut le multiplier par un certain coefficient qui fait alors connaître l'aire de la section contractée ; car, en désignant par A' l'aire de l'orifice, ce coefficient étant égal au rapport

$$\frac{A\sqrt{2gh}}{A'\sqrt{2gh}}\cdot\frac{t}{t},$$

on en conclut le rapport de $\frac{A}{A'}$ de l'aire de l'orifice à celle de la section contractée de la veine fluide.

Fig. 128. 359. Supposons maintenant que le vase, au lieu d'être constamment plein, se vide par degrés insensibles, le mouvement n'étant plus permanent, $\omega = f(s, t)$. Considérons un filet fluide le long de la paroi du vase ; soit p la pression au point A après un temps t, et P la pression en un point déterminé pour lequel $S = s_0$, et $\omega = \omega_0$; nous intégrerons à partir de $S = o$, et pour $S = o$, $p = p_0$.

Reprenons la formule générale

$$\frac{dp}{ds} = \rho\left(gdx - \frac{d\omega}{dt} - \frac{\omega d\omega}{ds}\right),$$

on a

$$a\omega = a_0\omega_0, \quad \omega = \omega_0 u,$$

u dépendant uniquement de S, et ω_0 dépendant seulement de t ; ω sera donc décomposé en ω_0, qui dépend de t, et u qui ne dépend que de S

$$\text{et} \quad \frac{d\omega}{dt} = u\,\frac{d\omega_0}{dt},$$

nous intégrerons à partir du point o qui n'est plus fixe dans le vase, puisqu'il s'abaisse avec le liquide ; par conséquent S variera avec le temps, et on aura

$$p-p_1=\rho\left[g(x-x_1)-\frac{1}{2}(\omega^2-\omega_1^2)-\frac{d\omega_0}{dt}\int_{s_1}^{s}uds\right].$$

Puisque le point A est extérieur à la veine contractée, on aura

$$p=\varpi=p_1;$$

ainsi en posant

$$x-x_1=h,$$

il viendra

$$gh=\frac{1}{2}(\omega^2-\omega_1^2)-\frac{d\omega_0}{dt}\int_{s_1}^{s}uds:$$

d'ailleurs

$$a_0\omega_0=a\omega=a_1\omega_1,\quad \omega=\frac{a_0}{a}\omega_0,\quad \omega_1=\frac{a_0}{a_1}\omega_0,$$

par suite

$$gh=\frac{1}{2}a_0^2\omega_0^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a_1^2}\right)-\frac{d\omega_0}{dt}\int_{s_1}^{s}uds.$$

Dans cette équation nous avons h et ω_0 qui sont des fonctions inconnues de t; quant à a_1 et s_1, on pourra les exprimer en fonction de h, toutes les fois que la forme du vase sera donnée. On peut d'ailleurs admettre, si les parois du vase s'écartent peu de la verticale, que

$$\frac{a_0}{a}=\frac{a'_0}{a'}=\ldots=\frac{A_0}{A},$$

de même

$$\frac{a_0}{a_1}=\frac{a'_0}{a'_1}=\ldots=\frac{A_0}{A_1},$$

et si nous désignons par S une section horizontale du vase, on aura pour la quantité u, qui est sous le signe $\int$,

$$u=\frac{A_0}{S},$$

donc il en résultera

$$gh=\frac{1}{2}\omega^2\left(\frac{A_0^2}{A^2}-\frac{A_0^2}{A_1^2}\right)-A_0\frac{d\omega_0}{dt}\int_{s_1}^{s}\frac{ds}{S}.$$

Cette équation n'est bien exacte que lorsque les filets sont verticaux dans toute l'étendue du vase. Dans cette équation A_0 est constant ; on peut également supposer A constant, si le vase est grand et l'orifice petit, A_1 est une fonction connue de h et S sera une fonction de s, en sorte que l'on pourra effectuer l'intégration et alors l'intégrale prise entre les limites, sera une fonction de h; comme nous admettons que la vitesse est sensiblement verticale au moins à la surface, il en résulte que $-\Delta h$ représente le chemin parcouru par une molécule liquide de la surface libre pendant le temps Δt : ainsi on a

$$a_1=-\frac{\Delta h}{\Delta t},$$

ou plus exactement

$$\omega_0=-\frac{dh}{dt},\quad \text{d'où}\quad \omega_0\frac{A_0}{A_1}=-\frac{dh}{dt},$$

nous avons donc deux équations entre h, ω_0, et intégrant ces deux équations simultanées, on connaîtra h et ω_0 en fonction de t.

On peut aussi calculer la dépense du vase ; en effet, la quantité de liquide écoulée pendant le temps Δt est



$-A_1\Delta h$, et pendant le temps t, $-\int_{h_1}^{h} A_1\,dh$: il faut exprimer A_1, en fonction de h, et alors on pourra effectuer l'intégration, et connaître la quantité de liquide écoulée pendant le temps t. Lorsque le liquide s'écoule très-lentement, alors ω est très-petit et varie aussi très-faiblement; par conséquent $\frac{d\omega}{dt}$ est lui-même très-petit, en sorte que l'on peut négliger cette quantité; alors il reste

$$2gh = A_0{}^2\omega_0{}^2\left(\frac{1}{A^2} - A_1{}^2\right) \quad \text{d'où} \quad \frac{A_0}{A_1}\omega_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{A_1{}^2}{A^2} - 1}},$$

et par suite

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{A_1{}^2}{A^2} - 1}} \quad \text{ou} \quad A\,dt = -\frac{dh}{\sqrt{2gh}}\sqrt{A_1{}^2 - A^2};$$

équation qui donne h en fonction de t quand on connaît A_1 en fonction de h ; comme A est très petit par rapport à A_1, on peut négliger cette quantité, en sorte qu'il vient

$$At = -\int_{h_1}^{h} \frac{A_0\,dh}{\sqrt{2gh}},$$

h_1 étant la valeur primitive de h.

360. Considérons enfin le cas où le vase étant constamment plein, le mouvement n'est pas permanent, c'est-à-dire où la vitesse varie avec le temps. Fig. 129.

Alors il faut avoir recours à l'équation

$$\frac{dp}{ds} = \rho\left(g\frac{dx}{ds} - \omega\frac{d\omega}{ds} - \frac{d\omega}{dt}\right):$$

désignons par a_0 et a_1 les sections faites dans un filet en contact avec la paroi du vase et perpendiculaires aux génératrices de ce filet, on aura, comme précédemment

$$a\omega = a_0\omega_0 \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0 \frac{a_0}{a} = \omega_0 u ;$$

or a est fonction de S seulement, puisque a_0 est constant et que a ne varie pas tant que la section AB ne se déplace pas : ω au contraire est la vitesse en un point déterminé de la masse liquide; par conséquent cette quantité est fonction du temps t seulement. Ainsi on aura

$$\frac{d\omega}{dt} = u \frac{d\omega_0}{dt},$$

et par suite, en remarquant que les pressions en o et A_1 sont égales à ϖ,

$$0 = g(x_1 - x_0) - \frac{1}{2}(\omega_1^2 - \omega_0^2) - \frac{d\omega_0}{dt}\int_{s_0}^{s_1} uds,$$

et posant

$$x_1 - x_0 = h, \quad 2gh = \omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\frac{d\omega_0}{dt}\int_{s_0}^{s_1} uds,$$

ou bien

$$2gh = \omega_0^2(u_1^2 - 1) + 2\frac{d\omega_0}{dt}\int_{s_0}^{s_1} uds, \qquad (1)$$

en faisant

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{\omega_0}{\omega_1} = u_1.$$

Cette équation conduit à une conséquence importante, savoir que la vitesse ω_0 ne peut pas croître indéfiniment. En effet $2gh$ est constant, $\int_{s_0}^{s_1} uds$ est constant et

positif, ainsi que (u_1^2-1) ; par conséquent ω_0 ne peut pas croître indéfiniment, car $\frac{d\omega_0}{dt}$ étant >0, le deuxième membre de l'équation (1) deviendrait infini ; ainsi, si la vitesse ω_0 croît d'abord, elle atteindra un maximum ou s'approchera indéfiniment d'une limite ; or dans le cas où ω_0 devient un maximum, on a $\frac{d\omega_0}{dt}=0$, et si ω_0 est très-près de sa limite, cette quantité sera sensiblement constante, et par suite $\frac{d\omega_0}{dt}$ sera sensiblement nulle ; ainsi toutes les fois que t sera considérable, l'équation (1) se réduira à

$$2gh=\omega_0^2(u_1^2-1)\,;$$

d'où

$$\omega_0=\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{u_1^2-1}},$$

et par suite

$$\omega_1=\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1-\frac{1}{u_1^2}}}.$$

Pour avoir une première valeur approchée de ω_1, il faut d'abord prendre $\omega_1=\sqrt{2gh}$; mais si l'on veut une valeur plus exacte, il faut admettre que les vitesses sont perpendiculaires à la surface libre du liquide, ainsi qu'à celle de la veine contractée. Elles sont d'ailleurs sensiblement verticales si les parois supérieures du vase sont elles-mêmes verticales : cette supposition est fondée sur la propriété qu'a un liquide de s'abaisser parallèlement à lui-même dans un vase dont les parois sont verticales. Cette même expérience conduit à ad-

mettre que les vitesses sont égales entre elles à la surface libre du liquide, ainsi que dans la section de la veine contractée ; ainsi on peut écrire

$$\omega_0=\omega_0'=\omega_0''\ldots\ \omega_1=\omega_1'=\omega_1''\ldots \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega_1}{\omega_0}=\frac{\omega_1'}{\omega_0'}=\ldots,$$

et par suite aussi

$$\frac{a_1}{a_0}=\frac{a_1'}{a_0'}=\frac{a_1''}{a_0''}\ldots$$

or les filets étant verticaux, les sections a_1, a_0 ; a'_1, a'_0 seront horizontales ; par conséquent on aura

$$a_1+a_1'+a_1''+\ldots=A_1 \quad \text{et} \quad a_0+a_0'+a_0''+\ldots=A_0,$$

en désignant par A_1, A_0 les aires de la surface libre et de la veine contractée, et par a_0, a'_0, a_1, a'_1 les sections faites dans les filets successifs de la même surface ; on aura donc

$$u_1=\frac{A_0}{A_1}:$$

la vitesse à la sortie du vase sera donc entièrement déterminée.

Revenons maintenant à l'équation

$$2gh=\omega^2-\omega_0^2+2\,\frac{d\omega_0}{dt}\int_{s_0}^{s_1} u\,ds,$$

et montrons comment il arrive qu'au bout d'un temps considérable, les vitesses ω_0 et ω_1 non-seulement ne croissent pas au delà de toute limite, mais s'approchent d'une limite constante.

Dans cette équation, qu'on peut mettre sous la forme

$$2gh=\omega_0^2\,(u^2-1)+2\,\frac{d\omega}{dt}\int_{s_0}^{s_1} u\,ds,$$

ω_0 doit être regardé comme fonction du temps t, et les autres quantités sont constantes : on en tire

$$\frac{d\omega_0}{dt}=\frac{2gh-\omega_0^2(u^2-1)}{2\int_{s_0}^{s_1}uds}=\frac{gh}{\int_{s_0}^{s_1}uds}\left(1-\frac{u^2-1}{2gh}\omega_0^2\right).$$

Les coefficients

$$\frac{gh}{\int_{s_0}^{s_1}uds} \quad \text{et} \quad \frac{u^2-1}{2gh}$$

étant indépendants du temps, représentons-les par des lettres particulières : ces coefficients étant essentiellement positifs, nous pourrons poser

$$\frac{gh}{\int_{s_0}^{s_1}uds}=\alpha \quad \text{et} \quad \frac{u^2-1}{2gh}=\beta^2,$$

nous aurons alors

$$\frac{d\omega}{dt}=\alpha(1-\beta^2\omega_0^2).$$

Voilà ce que devient l'équation du mouvement dans le cas où on suppose toujours que le vase est entretenu constamment plein, et il s'agit maintenant d'intégrer.

Or, supposons que le liquide parte de l'état de repos : nous aurons alors à l'origine du mouvement $t=o$ et $\omega_0=o$, et l'équation peut être mise sous la forme

$$\frac{d\omega_0}{1-\beta^2\omega_0^2}=\alpha dt;$$

mais on a

$$\frac{1}{1-\beta^2\omega_0^2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+\beta\omega_0}+\frac{1}{1-\beta\omega_0}\right\},$$

et l'équation sera donc

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+\beta\omega_0}+\frac{1}{1-\beta\omega_0}\right\}\frac{d(\beta\omega_0)}{\beta}=\alpha dt\,;$$

d'où

$$\frac{d(\beta\omega_0)}{1+\beta\omega_0}+\frac{d(\beta\omega_0)}{1-\beta\omega_0}=2\alpha\beta dt.$$

Nous tirerons de là, en faisant pour abréger $2\alpha\beta=\gamma$,

$$l(1+\beta\omega_0)-l(1-\beta\omega_0)=2\alpha\beta t=\gamma t,$$

d'où

$$\frac{1+\beta\omega_0}{1-\beta\omega_0}=e^{\gamma t} \quad \text{et} \quad 1+\beta\omega_0=e^{\gamma t}-\beta\omega_0 e^{\gamma t}.$$

Nous aurons donc

$$\beta\omega_0=\frac{e^{\gamma t}-1}{e^{\gamma t}+1}=\frac{1-e^{-\gamma t}}{1+e^{-\gamma t}},$$

et par conséquent

$$\omega=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1-e^{-\gamma t}}{1+e^{-\gamma t}};$$

γ étant aussi bien que α,β une quantité positive, en admettant, par exemple, qu'on ait pris pour β la racine positive.

Or le temps venant à croître et devenant infini, il est clair que $1-e^{-\gamma t}$ a pour limite l'unité; d'ailleurs pour $t=o$, la même quantité est égale à un, par conséquent $\beta\omega_0$, et par suite ω_0, s'approche d'une limite constante.

Quant aux pressions exercées dans l'intérieur du vase, et qui se déduisent de l'équation

$$\frac{dp}{ds}=\rho\left(g\frac{dx}{ds}-\omega\frac{d\omega}{ds}-\frac{d\omega}{dt}\right),$$

elles seront aussi sensiblement constantes : mais dès lors, et d'après ce que nous avons fait observer, le calcul n'est plus aussi rigoureux.

Si le vase ne reste pas constamment plein, et si on veut que h corresponde à un point déterminé de position dans le vase, alors l'équation intégrée

$$gh=\frac{1}{2}a_0^2\omega_0^2\left(\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_0^2}\right)+\frac{d\omega^0}{dt}\int_{s_0}^{s_1}uds,$$

renfermera ω_0, h et t, trois quantités qui, dans le cas présent, varient avec le temps. Ainsi nous aurons trois quantités inconnues ; la valeur de s_0 dépendra elle-même de la hauteur h, il en sera de même de la section a_0.

Voilà tout ce que nous pouvons donner sur l'hydrodynamique, en rejetant la théorie des tranches, dont les résultats sont en désaccord avec l'expérience.

NOTES.

Note A

FAISANT SUITE AU CHAPITRE VI (Dynamique).

361. Nous allons établir quelques formules qui nous seront utiles par la suite et qui déterminent les projections de la vitesse angulaire (on nomme moment de la vitesse angulaire le produit de cette vitesse par sa distance à l'axe fixe). Soit A un point du système, portons sur une perpendiculaire au plan AOD une longueur représentant la vitesse du point A, et supposons que sur une parallèle à l'axe menée par ce même point, on porte une longueur AB égale à la vitesse angulaire γ : en menant OA, OB, le triangle OAB aura une certaine surface dont le double sera égal au moment absolu de la vitesse angulaire : le moment linéaire de cette vitesse angulaire s'obtiendra en portant sur une perpendiculaire au plan AOB une longueur représentant le moment absolu, c'est-à-dire, égal à $AB \times AO = r\gamma$; or, nous avons $\omega = r\gamma$, et comme le moment linéaire est parallèle à la ligne qui représente la vitesse, les projections du moment linéaire de la vitesse angulaire sur les axes, seront égales aux projections de la vitesse sur les mêmes axes, car on peut d'ailleurs s'arranger pour que le Fig. 130.

moment linéaire se compte dans le même sens que la vitesse ω, parce qu'on est maître de porter γ suivant AB ou AB′, de sorte que le moment linéaire de la vitesse angulaire pourra être dirigé dans le même sens que la vitesse, puisque le moment linéaire doit être porté de manière que la force tende à produire un mouvement direct par rapport à l'observateur. Donc, en se rappelant que les projections des moments linéaires d'une force sur les axes sont

$$yZ-zY, \quad zX-xZ, \quad xY-yX,$$

on aura

$$(1) \quad \frac{dx}{dt}=\gamma(y\cos.\nu-z\cos.\mu), \quad \frac{dy}{dt}=\gamma(z\cos.\lambda-x\cos.\nu),$$
$$\frac{dz}{dt}=\gamma(x\cos.\mu-y\cos.\lambda).$$

On peut calculer les moments absolus et linéaires des vitesses et des quantités de mouvement comme on le ferait pour des forces puisque les uns et les autres peuvent être représentés par des longueurs portées à partir du point que l'on considère sur la direction de sa vitesse, pour cela posons pour abréger

$$(2) \quad \gamma\cos.\lambda=u, \quad \gamma\cos.\mu=v, \quad \gamma\cos.\nu=w,$$

alors il vient

$$(3) \quad \frac{dx}{dt}=wy-vz, \quad \frac{dy}{dt}=uz-wx, \quad \frac{dz}{dt}=vx-uy;$$

les projections de la quantité de mouvement sur les axes seront donc

$$m(wy-vz), \quad m(uz-wx), \quad m(vx-uy),$$

et par suite les projections de son moment linéaire seront

$$-mu(y^2+z^2)+mvxy+mwzx,$$

sur l'axe des x, et des expressions semblables pour les autres. Par conséquent, nous aurons pour les projections du moment linéaire principal, en adoptant les notations précédentes,

$$-u\Sigma m(y^2+z^2)+v\Sigma mxy+w\Sigma mzx=-Au+Fv+Ew;$$

on trouvera de même pour les deux autres

$$-Bv+Dw+Fu, \quad -Cw+Eu+Dv.$$

Ainsi, en appelant χ le moment linéaire principal de la quantité de mouvement, on aura

$$(4) \quad \chi^2=(Au-Fv-Ew)^2+(Bv-Dw-Fu)^2+(Cw-Eu-Dv)^2;$$

si nous désignons par φ^2 la somme des forces vives, nous avons $\varphi^2=k\gamma^2$, et par suite, en multipliant la valeur de k par γ^2

$$(5) \quad \varphi^2=Au^2+Bv^2+Cw^2-2Dvw-2Ewu-2Fuv;$$

enfin, la valeur de γ^2 prend la forme

$$(6) \quad \gamma^2=u^2+v^2+w^2.$$

Ces formules se simplifient lorsque D, E, F s'évanouissent, ce qui a lieu si les axes coordonnés viennent à coïncider avec les axes principaux du système à un instant quelconque du mouvement, alors on aura

$$(7) \quad \varphi^2=Au^2+Bv^2+Cw^2, \qquad (8) \quad \chi^2=A^2u^2+B^2v^2+C^2w^2.$$

Les formules 4 et 5 conviennent encore au cas où l'on ne rapporte pas le corps à des axes fixes de posi-

tion dans le corps : alors ABCDEF deviennent indépendants du temps parce que les coordonnées sont constantes : au contraire, $\lambda\mu\nu$ sont variables. Les axes fixes coïncident avec les axes principaux du corps; D,E,F sont constamment nuls; ainsi, on a toujours les formule simplifiées 7 et 8.

Note B

faisant suite au chapitre I (Hydrostatique).

Mécanisme du syphon.

Fig. 131. 362. Soit un tube recourbé plongé dans deux vases remplis du même liquide, soit ϖ la pression exercée sur AB, ϖ' celle exercée sur CD, et soit $\varpi' > \varpi$; cela peut arriver si AB est soumis à la pression atmosphérique, et si CD est soumis non-seulement à cette pression mais encore à celle d'un couvercle chargé de poids : soient h, h' les hauteurs, nous supposons le syphon plein d'eau; soit p la pression hydrostatique en f, on aura en ce point

$$p = \varpi - g\rho h\,,$$

de même

$$p = \varpi' - g\rho h'\,,$$

donc

$$\varpi - g\rho h = \varpi' - g\rho h' \quad \text{ou} \quad g\rho(h' - h) = \varpi' - \varpi\,,$$

à l'état d'équilibre : on avait fait d'abord le vide dans le syphon, de sorte que la pression ϖ aura fait monter le liquide et l'aura conduit au sommet f d'où il sera descendu dans la deuxième branche, et l'écoulement

aura continué : c'est alors à ce moment où le syphon est plein de liquide que la condition d'équilibre serait

$$g\rho(h'-h)=\varpi'-\varpi.$$

Or, $h'>h$, puisque $\varpi'>\varpi$. Donc, si A est la base du couvercle appliqué sur le vase CD, ϖA sera la pression sur ce couvercle provenant de l'atmosphère ; il faudra donc ajouter à cette pression un poids P tel que l'on ait

$$\varpi A+P=\varpi' A,$$

ce poids étant bien distribué sur ce couvercle ; si donc on retire ce poids, la pression intérieure agissant de bas en haut l'emportera, et le couvercle remontera dans le liquide dans ce vase, et, par conséquent, l'écoulement du liquide provenant du vase AB recommencera, et on pourra ainsi transvaser le liquide du premier vase dans le second. L'écoulement cessera quand le liquide du premier vase se trouvera avoir le même niveau que celui du deuxième. Si on conçoit que cela arrive, alors $h'=h$, par suite $\varpi'=\varpi$; par conquent, le liquide retombera de part et d'autre dans chaque branche, et le niveau s'y établira.

L'écoulement cesserait encore si la surface du liquide AB s'abaissait à une hauteur telle que $h>\frac{\varpi}{g\rho}$, car le poids de l'atmosphère tiendrait en équilibre une colonne de liquide dont la hauteur $h=\frac{\varpi}{g\rho}$; cela est vrai, que le tube soit droit ou courbe : ainsi, si dans ce tuyau courbe la hauteur $h>\frac{\varpi}{g\rho}$ il n'y aura pas moyen

de faire passer le liquide d'un vase dans l'autre par la pression atmosphérique. Enfin, l'écoulement cesserait encore si on pratiquait une ouverture dans le syphon en f, car alors la pression extérieure serait ϖ, tandis qu'elle ne serait que $\varpi - g\rho h$ dans l'intérieur, de sorte que la pression extérieure, en vertu de son excès de pression $g\rho h$, refoulerait le liquide dans le tube. La même chose aurait lieu si on pratiquait l'ouverture en un autre point du tube.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

PREMIÈRE PARTIE.

STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

§ II.

Propriétés des projections des forces et de leurs moments.

§ III.

Équilibre d'un point matériel.

CHAPITRE II.

ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME INVARABLE ET D'UN CORPS SOLIDE, RÉDUCTION D'UN SYSTÈME, page 35.

page 35.

§ I[er].

Force principale, moment principal, axe principal.

§ II.

Équilibre d'un corps solide libre.

§ III.

Systèmes équivalents.

§ IV.

Équilibre d'un corps solide assujetti à certaines conditions.

CHAPITRE III.

RÉDUCTION, COMPOSITION ET ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE FORCES PARALLÈLES, page 62.

CHAPITRE IV.

DÉTERMINATION DU CENTRE DE GRAVITÉ.

§ I[er].

Considérations générales sur les corps pesants et le centre de gravité, page 72.

§ II.

Centre de gravité des lignes.

§ III.

Centre de gravité d'une surface plane.

§ IV.

Centre de gravité des surfaces courbes.

§ V.

Centre de gravité des volumes.

CHAPITRE V.

CALCUL DE L'ATTRACTION DES CORPS SPHÉRIQUES, page 101.

CHAPITRE VI.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS FLEXIBLE, page 112.

§ Ier.

Équilibre d'un polygone funiculaire.

§ II.

Équilibre d'un fil flexible, ou courbe funiculaire.

CHAPITRE VII.

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES, page 140.

DEUXIÈME PARTIE.

DYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

§ Ier.

Formule du mouvement rectiligne.

§ II.

Exemple du mouvement rectiligne.



§ III.

Mouvement rectiligne de plusieurs corps agissant les uns sur les autres. — Expression de la force vive du système.

§ IV.

Lois du choc des corps en mouvement rectiligne.

CHAPITRE II.

FORMULES DU MOUVEMENT CURVILIGNE, page 215.

§ Ier.

Mouvement curviligne d'un point matériel soumis à des forces accélératrices quelconques.

§ II.

Mouvement curviligne d'un corps pesant dans le vide.

§ III.

Mouvement curviligne d'un corps pesant dans un milieu résistant.

CHAPITRE III.

MOUVEMENT D'UN CORPS PESANT SOUMIS A L'ACTION DE FORCES CENTRALES, LOIS DE KÉPLER, MOUVEMENT DES PLANÈTES, GRAVITATION UNIVERSELLE, page 245.

§ Ier.

Attraction et répulsion vers des centres fixes.

§ II.

Lois de Képler, mouvement des planètes.

§ III.

Mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale.

§ IV.

Attraction universelle, masse des planètes, densité moyenne de la terre.

CHAPITRE IV.

MOUVEMENT SUR UNE SURFACE OU SUR UNE COURBE DONNÉE, page 282.

§ Ier.

Équation du mouvement sur une surface ou une courbe donnée.

§ II.

Force centrifuge.

§ III.

Mouvement d'un corps pesant sur une courbe, isochronisme des oscillations.

§ IV.

Mouvement d'un point matériel pesant dans le cercle, pendule simple.

§ V.

Mouvement d'un corps pesant dans la cycloïde, pendule cycloïdal.

CHAPITRE V.

MOUVEMENT DE PLUSIEURS POINTS MATÉRIELS ASSUJETTIS A DES LIAISONS QUELCONQUES. PRINCIPE DE D'ALEMBERT, PRINCIPE DE LAGRANGE, page 321.

CHAPITRE VI.

MOUVEMENTS DE ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE, MOMENTS D'INERTIE, page 332.

§ Ier.

Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe quelconque.

§ II.

Détermination des moments d'inertie et des axes principaux.

§ III.

Évaluation du moment d'inertie des corps solides.

§ IV.

Mouvement de rotation d'un corps pesant autour d'un axe horizontal. — Pendule composé.

CHAPITRE VII.

MOUVEMENT D'UN SYSTÈME INVARIABLE AUTOUR D'UN POINT FIXE, page 361.

§ Ier.

Propriétés du mouvement d'un système invariable entièrement libre, axe instantané de rotation.

§ II.

Équations du mouvement d'un système invariable autour d'un point fixe.

§ III.

Propriétés de l'axe instantané de rotation.

CHAPITRE VIII.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE CORPS, page 385.

§ Ier.

Principe du centre de gravité.

§ II.

Principe des aires.

§ III.

Principe des forces vives.

§ IV.

CHAPITRE IX.

MOUVEMENT D'UN SYSTÈME ENTIÈREMENT LIBRE, p. 407.

CHAPITRE X.

CALCUL DE L'EFFET DES MACHINES, p. 412.

TROISIÈME PARTIE.

HYDROSTATIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES, page 424

CHAPITRE PREMIER.

CONDITIONS D'ÉQUILIBRE D'UN FLUIDE SOLLICITÉ PAR DES FORCES QUELCONQUES, page 428.

§ Ier.

Égalité des pressions, équations d'équilibre, principes des vitesses virtuelles.

§ II.

Surfaces de niveau, équilibre des liquides pesants.

CHAPITRE II.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT DES CORPS FLOTTANTS, p. 446.

§ Ier.

§ II.

Pression d'un liquide pesant sur une surface plane, centre de pression.

§ III.

Conditions de la stabilité des corps flottants.

§ IV.

Oscillations d'un corps flottant symétrique par rapport à une section verticale.

CHAPITRE III.

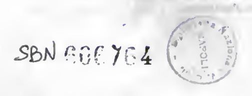
ÉQUILIBRE DES FLUIDES ÉLASTIQUES; NIVELLEMENT BAROMÉTRIQUE, page 479.

QUATRIÈME PARTIE.

HYDRODYNAMIQUE, page 497.

NOTES.

FIN DE LA TABLE.

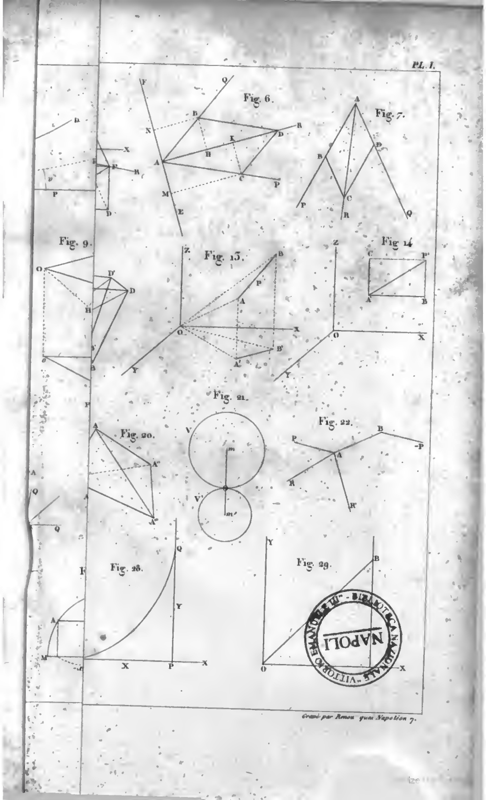


ERRATA

INDISPENSABLE A CONSULTER.

Page 118, 24e ligne, *lisez :* n, *au lieu de :* m.
Page 120, 5e ligne, *lisez :* D, *au lieu de :* d.
Page 278, *lisez :* fig. 65, *au lieu de :* fig. 63.
Page 288, *lisez :* fig. 66, *au lieu de :* fig. 65.
Page 294, *lisez :* fig. 67 et 68, *au lieu de :* 65 et 66.
Page 296, *lisez :* fig. 69 et 70, *au lieu de :* 67 et 68.
Page 298, *lisez :* fig. 71, *au lieu de :* fig. 69.
Page 305, *lisez :* fig. 72, *au lieu de :* 70.
Page 312, *lisez :* fig. 73, *au lieu de :* 71.
Page 314, *lisez :* fig. 74, *au lieu de :* 72.
Page 317, *lisez :* fig. 75, *au lieu de :* 74.
Page 326, *lisez :* fig. 76, *au lieu de :* 74.
Page 327, *lisez :* fig. 77, *au lieu de :* 75.
Page 329, *lisez :* fig. 78, *au lieu de :* 77.
Page 333, *lisez :* fig. 79, *au lieu de :* 77.
Page 340, *lisez :* fig. 80, *au lieu de :* 78.
Page 350, *lisez :* fig. 81, *au lieu de :* 79.
Page 362, 1re ligne, *lisez :* fig. 82.
Id. *id.*, 24e ligne, *lisez :* fig. 83.
Page 363, 10e ligne, *lisez :* fig. 84.
Id. *id.*, 27e ligne, *lisez :* fig. 85.
Page 364, 27e ligne, *lisez :* fig. 86.
Page 365, 25e ligne, *lisez :* fig. 87.

PARIS.—IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.


Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 9.
Fig. 13.
Fig. 14
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 28.
Fig. 29.
Gravé par Renou quai Napoléon 7.

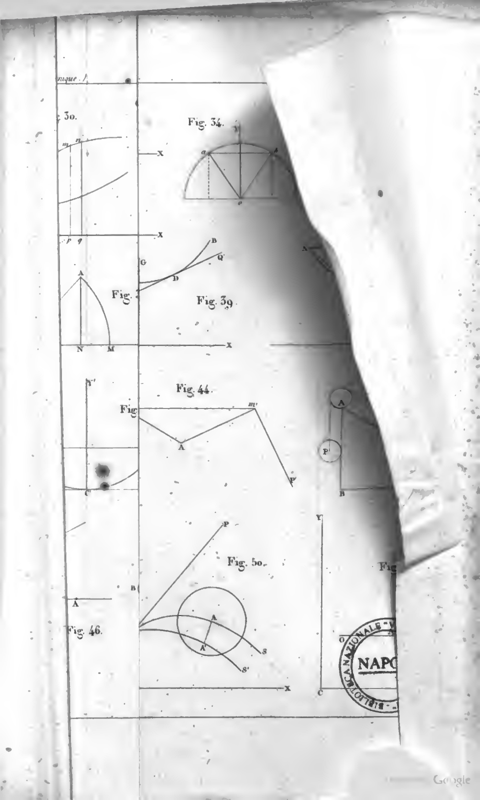
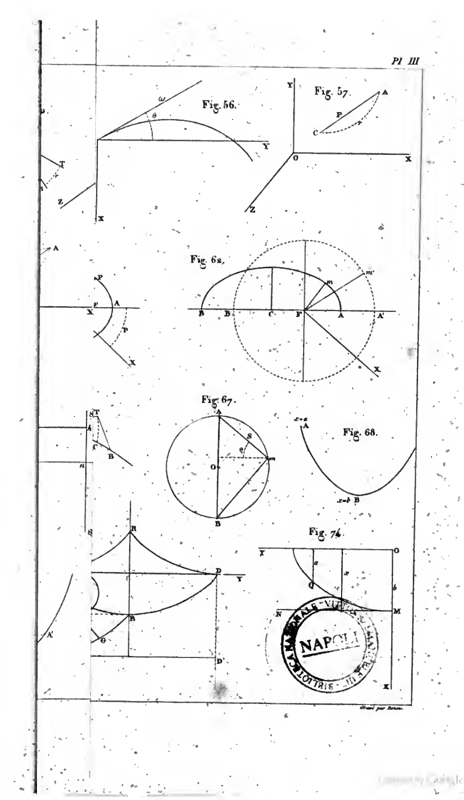
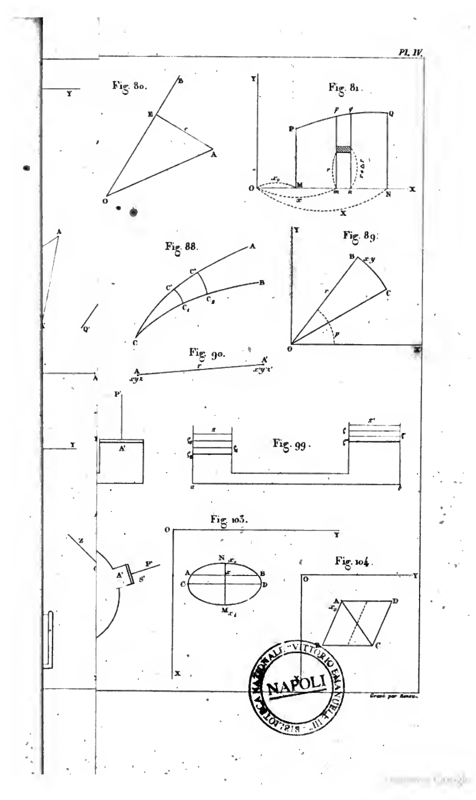
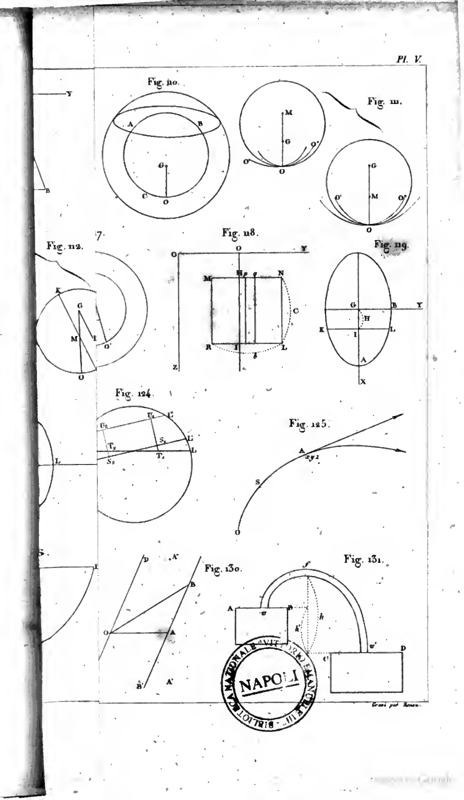


Fig. 30.
Fig. 34.
Fig. 39.
Fig. 44.
Fig. 46.
Fig. 50.


Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 62.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 74.
Gravé par Bonn.


Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 99.
Fig. 103.
Fig. 104.
Gravé par Renou.



Pl. V.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 118.
Fig. 119.
Fig. 124.
Fig. 125.
Fig. 130.
Fig. 131.
NAPOLI

